

UNIVERSITÉ PARIS VI

**DEMANDE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Spécialité:

**Mathématiques appliquées et applications des mathématiques**

présentée par

**Serge PIPERNO**

Contribution à l'étude mathématique et à la simulation numérique  
de phénomènes d'interaction fluide-structure.

**Rapporteurs**

Frédéric Bourquin  
Roger Ohayon  
Jean-Paul Vila

**Soutenue le 29 mai 2000 devant le jury composé de**

Frédéric Bourquin  
Robert Eymard  
Charbel Farhat  
Roger Ohayon  
Olivier Pironneau  
Jean-Paul Vila



## REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord remercier avec la plus grande gratitude Bernard Larrouturou. Après m'avoir guidé dans mes premiers choix scientifiques, il m'a accueilli les bras ouverts au Cermics et m'a proposé un thème de recherche particulièrement intéressant et porteur. Ses conseils attentionnés m'ont toujours aidé à aller de l'avant et à faire mieux.

Mes remerciements vont également à Loula Fezoui, Armel de La Bourdonnaye et Charbel Farhat. Ils ont tous les trois contribué fortement à la définition des recherches que j'ai menées. Charbel Farhat m'a accueilli au CSSC à l'Université du Colorado à Boulder pendant ma thèse. Son enthousiasme communicatif, sa curiosité permanente pour de nouvelles méthodes et sa volonté inébranlable d'aller vite et loin m'ont maintes fois motivé sur des sujets passionnants. Armel de La Bourdonnaye m'a encadré avec bienveillance au Cermics, en m'épargnant autant que possible les tâches ingrates de la direction de projet et en me faisant largement profiter de son propre rayonnement. Enfin, Loula Fezoui a été, et est toujours, une source inépuisable de questions – et de réponses! – aussi bien en mécanique des fluides qu'en électromagnétisme, sur un large spectre d'activités, que ce soit sur les modèles, les méthodes numériques, les implémentations ou les machines. Elle a contribué aussi à mes incursions les plus éloignées de mes recherches initiales.

Messieurs Frédéric Bourquin, Roger Ohayon, Jean-Paul Vila ont accepté de rapporter sur ma demande d'habilitation. Je les remercie très sincèrement pour le temps précieux qu'ils m'ont consacré et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mes recherches.

Messieurs Frédéric Bourquin, Robert Eymard, Charbel Farhat, Roger Ohayon, Olivier Pironneau et Jean-Paul Vila me font l'honneur de participer au jury de la soutenance. Je les en remercie vivement.

Je voudrais remercier les chercheurs avec qui j'ai eu la chance de collaborer, et qui, somme toute, ont contribué de manière essentielle au développement de mes recherches : entre autres, Frédéric Poupaud, Patrick Le Tallec, Alain Dervieux, Michel Lesoinne, Stéphane Lantéri, Mireille Bossy, Sophie Depeyre, Nathalie Glinsky-Olivier, Dominique Chappelle, Marina Vidrascu, Marc Thiriet.

Je voudrais aussi remercier Robert Rivière pour sa disponibilité inconditionnelle et Sabine Barrère pour sa gentillesse, qui m'ont tous les deux aidé sur des points plus concrets mais tout aussi essentiels. Enfin, ce travail n'aurait certainement pas été le même sans le réconfort permanent de Christel et Chloé, et le soutien de ma famille.



# DEMANDE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

## Synthèse de l'activité scientifique

Serge PIPERNO

Contribution à l'étude mathématique et à la simulation numérique  
de phénomènes d'interaction fluide-structure.

Ce dossier résume mon activité de recherche depuis 1992, menée au CERMICS (laboratoire commun à l'École Nationale des Ponts et Chaussées et à l'INRIA) à Sophia-Antipolis et pour une petite partie à l'Université du Colorado à Boulder pendant mon doctorat.

Mes travaux ont principalement porté sur l'analyse et la simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure (évolution couplée d'une structure toujours mobile, rigide ou déformable, et d'un fluide liquide ou gazeux, en écoulement autour ou contre une partie de la structure). Une première partie de mon activité a porté sur l'analyse et la construction d'algorithmes de couplage efficaces et capables de prédire avec précision la limite de stabilité d'un système donné. La mise au point d'une méthode d'évaluation des algorithmes de couplage devrait permettre par la suite de construire des algorithmes encore plus performants (précision, parallélisme).

La validation numérique de ces algorithmes a constitué un second axe de recherche, principalement sur les équations d'Euler pour un gaz compressible et sur les équations de Navier-Stokes pour un gaz incompressible. Pour ces validations, les simulations numériques ont demandé la mise au point de codes de simulation de la dynamique des fluides en maillage mobile.

Enfin, j'ai contribué à l'analyse et à l'élaboration de schémas en volumes finis précis et efficaces. Ces schémas permettent par exemple des simulations en maillage mobile sur des maillages assez grossiers, pour des cas où le raffinement de maillage devrait être permanent. J'ai aussi utilisé une méthode d'énergie, utilisée pour certains problèmes linéaires d'interaction fluide-structure, pour démontrer la stabilité  $L^2$  de schémas numériques linéaires, dont des schémas en volumes finis quelconques pour les équations de Maxwell.

Dans cette synthèse, les nombres entre doubles crochets renvoient à la liste des publications auxquelles j'ai contribué, tandis que les nombres entre simples crochets renvoient à la liste des références bibliographiques. Les deux listes sont placées en fin de document.

# Table des matières

|          |                                                                             |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Interactions fluide-structure: algorithmes de couplage</b>               | <b>3</b>  |
| 1.1      | Présentation du cadre général des travaux . . . . .                         | 3         |
|          | Dynamique des fluides en domaine déformable . . . . .                       | 3         |
|          | Dynamique des structures . . . . .                                          | 7         |
|          | Algorithmes de couplage envisagés . . . . .                                 | 8         |
| 1.2      | Étude d'un problème modèle linéaire . . . . .                               | 10        |
|          | Méthode des équations équivalentes . . . . .                                | 12        |
|          | Méthode des modes propres couplés . . . . .                                 | 13        |
|          | Méthode d'énergie . . . . .                                                 | 14        |
| 1.3      | Extension à un problème non-linéaire . . . . .                              | 19        |
|          | Méthodes numériques . . . . .                                               | 19        |
|          | Algorithmes . . . . .                                                       | 20        |
|          | Interprétation et principes généraux . . . . .                              | 22        |
| 1.4      | Évaluation d'un algorithme de couplage . . . . .                            | 22        |
|          | Une évaluation fondée sur la conservation de l'énergie . . . . .            | 22        |
|          | Analyse pour des algorithmes de type saute-mouton . . . . .                 | 25        |
|          | Résultats numériques . . . . .                                              | 25        |
|          | Perspectives . . . . .                                                      | 27        |
| <b>2</b> | <b>Interactions fluide-structure: simulations numériques</b>                | <b>28</b> |
| 2.1      | Quelques résultats en aéroélasticité compressible . . . . .                 | 28        |
|          | Cas tests . . . . .                                                         | 28        |
|          | Méthodes numériques . . . . .                                               | 30        |
|          | Résultats numériques . . . . .                                              | 31        |
| 2.2      | Quelques résultats en aéroélasticité incompressible . . . . .               | 33        |
|          | Problèmes modèles et méthodes numériques . . . . .                          | 33        |
|          | Résultats numériques . . . . .                                              | 35        |
|          | Perspectives . . . . .                                                      | 37        |
| <b>3</b> | <b>Volumes finis: précision, stabilité et estimations d'énergie</b>         | <b>39</b> |
| 3.1      | Précision et efficacité de schémas volumes finis . . . . .                  | 39        |
|          | Monotonie et haute précision . . . . .                                      | 39        |
|          | Comparaison de méthodes déterministe et probabiliste . . . . .              | 44        |
|          | Perspectives . . . . .                                                      | 46        |
| 3.2      | Énergies discrètes et stabilité $L^2$ de schémas en volumes finis . . . . . | 46        |
|          | Retour sur le modèle linéaire de piston . . . . .                           | 46        |
|          | Modèle de dérive-diffusion . . . . .                                        | 47        |
|          | Équations de Maxwell en volumes finis . . . . .                             | 50        |
|          | <b>Liste des publications</b>                                               | <b>54</b> |
|          | <b>Références bibliographiques</b>                                          | <b>54</b> |

# 1 Interactions fluide-structure: algorithmes de couplage

Comme on l'a dit plus haut, les phénomènes aéroélastiques sont des phénomènes couplés mettant en jeu un gaz et une structure en contact. Les deux milieux sont couplés par le jeu des conditions aux limites à l'interface fluide-structure. Pour la structure, un champ de contraintes dites fluides est exercé sur une partie de sa frontière. Pour le fluide, des conditions aux limites en vitesse, condition d'adhérence ou de glissement suivant que le fluide est visqueux ou non, sont imposées sur une partie de la frontière du domaine.

Ce couplage est un peu particulier, dans la mesure où il se fait entre deux domaines par l'intermédiaire d'une frontière dont la position est *a priori* inconnue. C'est d'ailleurs une des principales difficultés pour les démonstrations d'existence et d'unicité de solution de problèmes couplés de ce type. Les voies les plus prometteuses sont d'ailleurs celles où l'on se ramène à un domaine indépendant de la solution. On peut citer notamment les méthodes de "level set" [61] ou les démonstrations dans une optique Lagrangienne - topologiquement limitées - où l'on se ramène à une configuration initiale de référence [40].

Les couplages de type "fluide-structure" se différencient donc des couplages d'équations dans un même domaine (magnétohydrodynamique, transport de particules chargées dans un champ électromagnétique, écoulement d'un mélange de gaz réactifs ou non, les fractions massiques étant couplées dans l'ensemble de l'écoulement) ou des couplages entre sous-domaines fixés au départ pour une même équation. En tout cas, la simulation numérique de phénomènes d'interactions fluide-structure s'est considérablement développée au cours des dernières années (on pourra trouver dans [26] un historique (qui commence à dater) du développement des simulations aéroélastiques en aéronautique), en même temps que la résolution par sous-domaines et la simulation d'autres problèmes couplés. Ces développements conjoints sont dus d'abord à l'accroissement permanent des performances de nos calculateurs, mais aussi aux succès précédents de la simulation numérique en général. Ces divers éléments rendent désormais possibles la simulation de phénomènes complexes plus proches de la réalité industrielle.

## 1.1 Présentation du cadre général des travaux

La simulation d'un couplage aéroélastique passe par l'intégration simultanée des équations d'évolution du fluide et de la structure. Naturellement, les numériciens ont porté leur attention sur les méthodes existantes de résolution des équations de la dynamique des structures et de la dynamique des fluides en domaine déformable. Pour ces dernières, le couplage avec un autre système n'est pas présent. Simplement, les équations sont posées dans un domaine variable dont on connaît l'évolution *a priori*. Par exemple, la simulation de l'écoulement et de la combustion d'un mélange de gaz frais dans un cylindre d'un moteur à explosion [50] doit se faire dans un domaine variable, puisque les temps caractéristiques de la combustion d'une part, et du déplacement du piston d'autre part, sont comparables. Ces méthodes en domaine déformable sont en fait facilement incorporées dans un algorithme global de couplage.

Nous présentons ici le cadre général des travaux sur les algorithmes de couplage. Les rappels proposés dans cette section, et dans cette section seulement, ne sont pas des résultats de recherche originaux, mais nous les avons cependant jugés nécessaires.

### Dynamique des fluides en domaine déformable:

Différentes méthodes pour les domaines déformables sont disponibles. Chacune de ces méthodes revêt deux aspects complémentaires: le mouvement de maillage lui-même (la

transmission du mouvement du bord du domaine fluide au reste de la discrétisation) et l'adaptation de méthodes numériques existantes aux équations du modèle après reformulation.

Pour le mouvement de maillage, un éventail assez large de méthodes a été considéré, allant d'une formule algébrique d'adaptation du maillage [27] à l'utilisation de principes variationnels (avec contrainte sur la régularité et l'orthogonalité) pour la génération d'un nouveau maillage intérieur [48], en passant par des algorithmes plus généraux fondés sur une analogie élastique. Pour ces derniers, on se limite en général à une topologie constante (déplacements de sommets uniquement), et à chaque pas de temps, un équilibre de l'ensemble des sommets sous l'action de forces de rappel virtuelles est recherché. Citons, par exemple, les ressorts liés aux arêtes [4] ou des ressorts de torsion aux sommets [15]. La possibilité de faire évoluer la topologie en même temps que la position du maillage est encore assez peu envisagée, si ce n'est par des remaillages classiques [8].

Pour ce qui est de l'adaptation des méthodes numériques aux nouvelles équations, certaines approches, historiquement liées aux différences finies, utilisent un maillage de référence et travaillent sur des coordonnées curvilignes variables dans le temps. Les méthodes numériques doivent être adaptées aux nouvelles équations [52]. D'autre part, les grandeurs géométriques liées au maillage (métrique, Jacobien) sont autant de nouvelles variables qui consomment de la place mémoire et du temps de calcul [27]. On peut noter ici que la mise à jour des variables géométriques peut être déterminante pour laisser à certaines méthodes numériques leur caractère conservatif [66].

D'autres méthodes utilisent une formulation avec repères mobiles, liés localement à la structure [20]. Elles trouvent une généralisation naturelle dans les formulations Arbitrairement Lagrangiennes Eulériennes (ALE), qui permettent d'adopter un point de vue Lagrangien au voisinage de la structure (lié à une particule fluide, et à la structure pour un fluide visqueux), un point de vue Eulérien loin de celle-ci (lié au laboratoire) et de changer d'approche de manière continue [14]. Dans une approche ALE, le point de vue est lié à un maillage mobile imaginaire du domaine fluide. La vitesse  $\vec{w}$  de ce maillage n'est pas forcément nulle (comme dans une approche Eulérienne) ni égale à la vitesse du fluide (comme dans une approche Lagrangienne). Elle peut varier arbitrairement et continûment d'une valeur à l'autre.

Rappelons brièvement la formulation ALE d'un système de lois de conservation. Nous notons  $\vec{x}$  les coordonnées Eulériennes dans le repère du laboratoire et  $\vec{a}$  les coordonnées Lagrangiennes liées au fluide. Une dérivation à  $\vec{a}$  fixé donne une dérivée particulière. On utilise aussi des coordonnées mixtes  $\vec{\xi}$ , qui peuvent être vues comme des fonctions des coordonnées Lagrangiennes  $(\vec{a}, t)$  ou des coordonnées Eulériennes  $(\vec{x}, t)$ . Cette alternative est importante. Elle est liée à la culture originellement Lagrangienne ou Eulérienne des utilisateurs. Elle produira, à terme, soit une formulation ALE classique [14], telle qu'on peut la trouver chez les spécialistes de formage par exemple, soit à une formulation dite en maillage dynamique, chez les numériciens des fluides spécialistes de l'aéroélasticité aéronautique et spatiale [4].

Lorsque  $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{a}, t)$ , on définit le Jacobien  $J$  des variables mixtes et la vitesse de transformation  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  par

$$J(\vec{a}, t) = \det \left( \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{a}} \Big|_t (\vec{a}, t) \right), \quad \vec{w}(\vec{a}, t) = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \Big|_{\vec{a}} (\vec{a}, t),$$

où une variable maintenue constante lors d'une dérivation est rappelée en indice. On a le lemme de conservation d'une grandeur volumique quelconque  $g$  suivant :

**Lemme 1** Soit  $g$  une grandeur scalaire. Si  $g$  et  $\vec{\xi}$  sont des fonctions assez régulières de  $(\vec{a}, t)$ , alors on a

$$\left. \frac{\partial(Jg)}{\partial t} \right|_{\vec{a}} (\vec{a}, t) = J(\vec{a}, t) \left[ \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} + \text{div}_{\vec{\xi}}(g\vec{w}) \right] \left( \vec{\xi}(\vec{a}, t), t \right).$$

Pour se fixer les idées, considérons les équations d'Euler de la dynamique des gaz en trois dimensions, données par

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0, \text{ avec } \begin{cases} W = {}^t(\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E), \\ F_i = u_i W + P^t(0, \delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3}, u_i), i=1,2,3, \end{cases}$$

où  $\rho, u_1, u_2, u_3, E$  et  $P$  représentent respectivement la masse volumique, les trois composantes de la vitesse, l'énergie par unité de volume et la pression donnée par une loi d'état (par exemple, celle des gaz parfaits,  $P = (\gamma - 1)[E - \rho(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)/2]$ ,  $\gamma$  étant un paramètre fixé). En appliquant le Lemme 1 successivement à chacune des composantes de  $W$ , nous obtenons la reformulation ALE des équations d'Euler en coordonnées hybrides

$$\left. \frac{\partial(JW)}{\partial t} \right|_{\vec{a}} (\vec{a}, t) + J(\vec{a}, t) \text{div}_{\vec{x}}[(F_1, F_2, F_3) - (w_1 W, w_2 W, w_3 W)] \left( \vec{\xi}(\vec{a}, t), t \right) = 0.$$

Les méthodes en maillage dynamique ressemblent très fortement aux formulations ALE classiques. La distinction entre les deux types de formulation provient du système de coordonnées de référence. Pour les formulations ALE classiques, les coordonnées mixtes  $\vec{\xi}$ , entre autres, sont exprimées en variables Lagrangiennes. Pour les maillages dynamiques, les coordonnées de référence sont les coordonnées Eulériennes et les coordonnées Lagrangiennes sont totalement absentes.

Les coordonnées mixtes  $\vec{\xi}$  sont désormais exprimées en fonction des coordonnées Eulériennes par  $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$ . Le Jacobien  $J$  de la transformation et la vitesse  $\vec{w}$  (qui peut être vue comme une vitesse de maillage, puisqu'un point du maillage se verra attribuer une coordonnée mixte  $\vec{\xi}$  invariante dans le temps) par

$$J(\vec{x}, t) = \det \left( \left. \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \right|_t (\vec{x}, t) \right), \quad \vec{w}(\vec{x}, t) = \left. \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} (\vec{x}, t).$$

On a le lemme de conservation d'une grandeur volumique quelconque  $g$  suivant:

**Lemme 2** Pour toute quantité scalaire  $g$  (suffisamment régulière), on a:

$$\left. \frac{\partial(Jg)}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} = J \left( \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \text{div}_{\vec{x}}(g\vec{w}) \right).$$

On pourra trouver deux démonstrations de ce lemme élémentaire [56], qui n'est pas tout-à-fait équivalent au lemme précédent (où l'on aurait remplacé les variables Lagrangiennes par les variables Eulériennes). Si l'on applique ce lemme aux variables conservatives  $\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3$  et  $E$ , on obtient une nouvelle forme des équations d'Euler en trois dimensions

$$\left. \frac{\partial(JW)}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} + J \text{div}_{\vec{x}} \vec{F} = 0, \text{ avec } \begin{cases} W = {}^t(\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E), \\ \vec{F}_i = (u_i - w_i) W + P^t(0, \delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3}, u_i), i=1,2,3, \end{cases} \quad (1)$$

La dénomination habituelle de "maillage dynamique" prend véritablement son sens quand la formulation précédente est utilisée sous forme intégrale. La démarche physique correspondante consiste à écrire un bilan de conservation sur un petit volume de contrôle, susceptible de se déformer au cours du temps. Soit  $C$  un petit volume de contrôle, qui sera amené à être une cellule déformable dans une méthode de volumes finis en maillage dynamique. Il occupe le domaine  $C_{\vec{x}}$  dans les coordonnées du laboratoire et le domaine  $C_{\vec{\xi}}$  dans l'espace des coordonnées mixtes. On suppose que le domaine  $C_{\vec{\xi}}$  ne dépend pas du temps. En ce sens, les coordonnées mixtes  $\vec{\xi}$  sont liées au maillage. En intégrant (1) sur  $C_{\vec{\xi}}$ , on trouve:

$$\int_{C_{\vec{\xi}}} \left. \frac{\partial(JW)}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} d\vec{\xi} + \int_{C_{\vec{\xi}}} J \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{F} d\vec{\xi} = 0.$$

Comme la dérivée en temps est prise à  $\vec{\xi}$  constant, et comme justement le domaine  $C_{\vec{\xi}}$  est indépendant du temps, on peut faire sortir la dérivation en temps de l'intégrale. De plus, on peut faire le changement de variables  $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$  (avec le changement de mesure  $d\vec{x} = J d\vec{\xi}$ ), on obtient finalement:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{C_{\vec{x}}} W d\vec{x} \right] + \int_{C_{\vec{x}}} \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{F} d\vec{x} = 0. \quad (2)$$

Cette formule n'est valable que si le domaine  $C_{\vec{x}}$  correspond à une cellule fixe dans l'espace des coordonnées mixtes. Elle se prête particulièrement bien aux discrétisations en volumes finis. On trouvera dans [30] une formulation générale des schémas de type Godunov, pour les équations hyperboliques monodimensionnelles, écrits en maillages dynamiques. Pour la résolution de (2), l'extension aux maillages dynamiques pour différentes méthodes classiques a déjà été faite. Les plus populaires sont probablement les solveurs de Riemann approchés de type Roe et leurs extensions aux ordres supérieurs [38], ainsi que le "flux-vector splitting" de Van Leer [5]. Pour toutes ces méthodes où le maillage est mobile, un ordre en temps supérieur à un ne peut être obtenu qu'en prenant en compte assez précisément le mouvement de maillage. Des expressions pour les termes géométriques dans les fonctions de flux numériques peuvent être obtenues à partir d'une approche spatio-temporelle [49]. On peut aussi faire le choix, qui n'est pas nécessairement incommode avec l'approche précédente, de conserver exactement les volumes (voir la fameuse "Geometric Conservation Law" [66]) pour assurer la conservativité des méthodes numériques, ce qui semble être une condition suffisante pour obtenir une formulation consistante [24] et une propriété cruciale pour certaines simulations aéronautiques [42]. On tombe alors sur un nombre très restreint de combinaisons possibles pour les discrétisations en espace et en temps [36]. Une autre voie possible consiste à considérer le volume de chaque cellule comme une inconnue et de l'intégrer en temps suivant le même schéma - y compris en espace - que pour les variables conservatives. Cette façon de faire [66] assure la conservation du volume total et la conservativité. Elle reste cependant assez coûteuse et peu utilisée.

Nous terminons ici par quelques remarques à propos des conditions aux limites pour les fluides en domaine déformable. Si le mouvement des bords du domaine est connu, et seulement dans ce cas, le traitement des conditions aux bords n'est pas particulièrement complexe. Les conditions de glissement pour un fluide non visqueux ou d'adhérence pour un fluide visqueux concernent en fait la vitesse relative du fluide par rapport au bord. Pour des conditions de type "écoulement à l'infini", la condition fait désormais intervenir la vitesse relative à l'infini par rapport au maillage.

## Dynamique des structures:

L'intégration en temps de la partie structure dans une simulation d'interaction fluide-structure ne pose pas de problème supplémentaire, contrairement au fluide où l'on doit déformer le domaine de calcul, faire bouger le maillage et reformuler les équations. La structure est généralement traitée de manière Lagrangienne et c'est plutôt le domaine fluide qui s'adapte aux déplacements de la structure. Dans le cadre des algorithmes de couplage décalés ou itératifs que nous considérons, un code de dynamique des structures, pour être utilisé, doit pouvoir recevoir des forces nodales et retourner des déplacements. Il reste à la charge de l'utilisateur de traiter le transfert des données d'un code vers l'autre, ce qui n'est pas immédiat lorsque les maillages fluide et structure ne coïncident pas [17]. Ceci peut se faire de manière automatique, y compris lorsque le domaine fluide est partitionné en sous-domaines [46].

Nous avons choisi de ne pas limiter le domaine d'applications des méthodes considérées, par exemple aux petits déplacements ou à des superpositions modales. Dans certains cas, nous le verrons dans la suite, une hypothèse de petits déplacements peut apporter des simplifications aussi bien pour le fluide (où une méthode de transpiration [33] est alors possible) que pour la structure qui devient purement linéaire. Pour certains tests en aérodynamique et en génie civil, nous néanmoins avons étudié des profils en mouvement rigides, ce qui simplifie considérablement l'intégration en temps des structures. À terme, la simulation de couplages fluide-structure, avec des structures subissant éventuellement de grands déplacements reste notre objectif, pour la simulation des comportements de grandes constructions du génie civil dans le vent ou de vaisseaux sanguins.

Dans les cas linéaires, la dynamique de la structure peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre du type

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = F, \quad (3)$$

où  $M$ ,  $D$  et  $K$  sont respectivement des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité et  $q$  un vecteur de coordonnées généralisées pour les déplacements de la structure. L'équation (3) est obtenue soit après discrétisation par éléments finis [12], soit par une approche modale. Dans le premier cas, les matrices obtenues ont une taille égale au nombre de degrés de liberté, dans le second la taille des matrices de masse, amortissement et rigidité généralisées est réduite au nombre de modes propres considérés. Cette approche peut être suffisante si on s'intéresse à des basses fréquences couplées (proches des basses fréquences propres de la structure seule). Quelques travaux avec approche modale ont été menés en aérodynamique compressible [26], notamment lorsque la structure (avion complet) est trop complexe. Néanmoins, cette approche semblerait bien plus adaptée pour certains phénomènes aéroélastiques en génie civil.

L'intégration en temps de l'équation linéaire du second ordre (3) est faite la plupart du temps par une méthode de Newmark qui s'écrit

$$\begin{cases} M\ddot{q}^{n+1} + B\dot{q}^{n+1} + Kq^{n+1} = F^{n+1}, \\ \text{avec } \dot{q}^{n+1} = \dot{q}^n + \Delta t \ddot{q}^{n+\gamma} \text{ et } q^{n+1} = q^n + \Delta t \dot{q}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}^{n+2\beta}. \end{cases} \quad (4)$$

Dans l'équation précédente et dans la suite de cette synthèse, on a utilisé la notation classique suivante

$$z^{n+\theta} = (1 - \theta)z^n + \theta z^{n+1}, \quad (5)$$

où  $z$  est une inconnue prenant les valeurs successives  $z^n$  et  $\theta$  est un paramètre entre 0 et 1. La méthode de Newmark est du second ordre et inconditionnellement stable. Elle se réduit à la règle du trapèze quand  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 1/4$  (la plus couramment utilisée).

Les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  contrôlent la dissipation numérique de la méthode. Pour la règle du trapèze, la dissipation numérique est nulle (plus précisément, lorsque  $B = 0$  et  $F = 0$ , l'énergie mécanique totale est conservée). Dans certains cas, on utilise des méthodes plus fines, où l'on contrôle un peu mieux la dissipation à haute et basse fréquences. Citons ici les  $\alpha$ -méthodes généralisées [10] qui contiennent d'autres familles de méthodes également connues (les HHT- $\alpha$  méthodes [32] et les WBZ- $\alpha$  méthodes [76]).

Lorsque la structure est linéaire, la règle du trapèze est particulièrement efficace si le pas de temps  $\Delta t$  reste constant pendant toute la simulation, puisque la factorisation de la matrice à inverser pour résoudre (4) peut être faite une fois pour toutes. Pour une approche modale, l'intégration en temps de la structure est évidemment très rapide, une fois que les modes propres et les matrices modales ont été calculés. Il reste cependant une étape de projection sur les modes propres à chaque pas de temps.

Lorsque la structure est non-linéaire (matériau non-linéaire ou grands déplacements), l'intégration de la structure est nécessairement beaucoup plus coûteuse, puisque les matrices de masse et de rigidité sont recalculées à chaque pas de temps et peuvent être même des opérateurs non-linéaires. Pour mémoire, rappelons ici que le mouvement rigide d'un corps sort du domaine linéaire, puisque des fonctions sinusoïdales interviennent dans le calcul des déplacements à partir de l'angle de rotation.

### Algorithmes de couplage envisagés:

Le couplage peut être vu comme un cycle d'interaction ou d'échanges entre plusieurs systèmes physiques. Dans le cas qui nous intéresse, les échanges de quantité de mouvement et d'énergie entre le fluide et la structure ont lieu à chaque instant. Les déplacements de l'interface fluide-structure induisent immédiatement une modification de l'écoulement. Réciproquement, une variation des contraintes à l'intérieur du fluide entraîne une variation dans les forces appliquées à la structure, ce qui modifie son mouvement.

Pour certaines applications, le couplage est traité par une théorie simplifiée, où le comportement d'un des sous-systèmes est directement déduit de celui de l'autre par une formule analytique. De cette manière, le couplage de deux sous-systèmes est remplacé par un "auto-couplage" d'un seul sous-système. C'est le cas, par exemple, pour une étude sur l'influence des amortissements aérodynamique et structurel sur le comportement aéroélastique d'ailerons d'avion [45]: on utilise dans ce cas précis une formule approchée qui prédit les forces de pression exercées sur les parois en fonction de la fréquence d'oscillation de l'aile. De même, pour le flottement de plaques en écoulement potentiel linéarisé subsonique [43], on utilise une équation du type

$$\frac{v(\vec{x})}{u_\infty} = \frac{1}{8\pi} \int_{surf} \Delta C_p(\vec{x}_s) \cdot K(\vec{x} - \vec{x}_s) d\vec{x}_s,$$

qui donne l'expression de la vitesse verticale du fluide autour d'une aile en fonction du champ de pression ( $K$  est un noyau donnant la vitesse verticale en  $\vec{x}$  induite par une impulsion donnée en  $\vec{x}_s$ ). Pour le flottement non-linéaire d'un panneau sous un écoulement supersonique [58], en utilisant la théorie quasi-statique des écoulements supersoniques [7], on peut considérer l'expression suivante (où  $M_\infty$  est le nombre de Mach à l'infini):

$$\Delta C_p = \left( \frac{-2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \right) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{u_\infty} \left( \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \right].$$

Ces artifices permettent d'éviter de véritables simulations numériques de couplages. Ils ne s'appliquent que dans des cas très particuliers, bien loin des configurations complexes que nous voudrions simuler, comme, par exemple, le flottement d'une structure dans un écoulement transsonique compressible ou l'instabilité d'une structure en grands déplacements dans un écoulement incompressible (les phénomènes non-linéaires sont alors prépondérants). Par contre, une telle formule peut permettre de prédire la stabilité du système couplé avant discrétisation en espace et en temps, ce qui permet d'évaluer la performance d'un algorithme de couplage.

Presque toutes les méthodes utilisées en aéroélasticité utilisent la notion de cycle d'interaction. L'idée sous-jacente est en fait l'intégration temporelle décalée des deux sous-systèmes. On comprend d'ailleurs que l'intégration simultanée du fluide et de la structure est très difficile en général, puisque la position du maillage du domaine fluide et toutes les grandeurs géométriques deviennent alors des inconnues du problème. Pour une méthode implicite par exemple, il faudrait disposer de fonctions donnant explicitement l'influence d'une structure sur un écoulement, ou réciproquement le champ de pression d'un fluide autour d'une forme. Les coûts de calculs induits sont rapidement prohibitifs [55]. On peut cependant noter que certains algorithmes de type monolithique (où une équation globale sur toutes les variables est résolue à chaque instant) sont implémentés comme des algorithmes décalés [41]. La résolution de l'équation globale de couplage est alors résolue de manière itérative par sous-système. On convient ici de classer ces algorithmes dans la catégorie des algorithmes dits "décalés".

Un algorithme décalé peut s'écrire:  $F^n \xrightarrow{1} S^{n+1} \xrightarrow{2} I^{n+1} \xrightarrow{3} M^{n+1} \xrightarrow{4} \mathbb{F}^{n+1} \xrightarrow{5} F^{n+1} \dots$  Respectivement,  $\mathbb{F}$ ,  $S$ ,  $I$ ,  $M$  et  $F$  représentent l'état du fluide et de la structure, la position de l'interface fluide-structure, le maillage du domaine fluide et la distribution des forces exercées par le fluide sur la structure. Les exposants sont relatifs au pas de temps courant. Ici, on intègre la structure d'abord, puis le fluide (le choix inverse est aussi possible). Les deux sous-systèmes sont donc décalés. La structure, intégrée en premier, semble être en avance sur le fluide. Il est difficile d'évaluer *a priori* l'influence de l'algorithme de couplage sur le résultat numérique. Il y a quelques années, ces considérations étaient mises de côté: on utilisait séparément en "boîte noire" des codes de simulation du fluide et de la structure, avec des pas de temps très faibles.

Les algorithmes décalés (et les algorithmes monolithiques itératifs) sont assez facilement implémentables. Leur principale qualité est de pouvoir reposer sur des codes existants de simulation de chaque sous-système. Pour l'interaction fluide-structure en particulier, on peut utiliser de manière modulaire un solveur fluide en domaine déformable et un solveur structure de son choix. Éventuellement, le plus simple est de faire interagir les deux codes par l'intermédiaire d'un coupleur, régissant les échanges de données et pilotant le couplage proprement dit. Ce serait lui, par exemple, qui aurait l'initiative du sous-cyclage d'un des sous-systèmes (si les temps caractéristiques d'évolution de l'autre sous-système est bien plus grand) ou des itérations sur l'équation globale de couplage. Le coupleur aurait aussi en charge la traduction des données d'un code vers l'autre, notamment dans les cas où les discrétisations spatiales ne coïncident pas à l'interface [17]. Dans la pratique, une autre approche sans programme maître peut permettre d'améliorer l'efficacité globale du code de simulation.

Enfin, des questions primordiales se posent quant à la précision et la stabilité des algorithmes de couplage décalés ou itératifs. Même si des schémas précis et stables sont utilisés pour chacun des sous-systèmes, la précision et la stabilité du schéma global dépend

très fortement du traitement du couplage proprement dit. Peu de résultats sur la question sont disponibles, si ce n'est pour des algorithmes implicites monolithiques avec traitement explicite de la géométrie (voir [23] pour la dimension un). L'évaluation de la précision et de la stabilité des algorithmes de couplage décalés est au cœur de la problématique de cette première partie.

## 1.2 Étude d'un problème modèle linéaire

*Thèse et Publications* [2] [1]

Même pour un problème très simplifié d'interaction fluide-structure, le couplage de méthodes numériques utilisées séparément pour chacun des champs ne va pas de soi, surtout lorsqu'on choisit de algorithmes de type décalé. Les propriétés de stabilité et de précision des algorithmes décalés a constitué le sujet principal de mes travaux de thèse.

Intuitivement, on comprend que certaines propriétés des méthodes couplées sont plus facilement retrouvées dans l'algorithme de couplage (décalé ou non). D'abord, la précision spatiale se transporte généralement, à la condition raisonnable que les traitements des conditions aux bords soient adaptés. De même, l'efficacité globale de l'algorithme est directement reliée à celles des méthodes utilisées (sauf peut-être pour les algorithmes de type monolithiques avec résolution itérative: si la convergence est mauvaise, l'efficacité de l'algorithme peut alors s'effondrer!).

Parallèlement, la stabilité est *la* propriété qui ne se transmet pas en général à l'algorithme de couplage. En effet, les études de stabilité sont faites sur un problème homogène sans terme source (dépendant de la solution elle-même). Dans un système couplé, chaque champ intervient comme un terme source pour l'autre champ, mais il n'est pas un terme source à proprement parler, puisqu'il dépend de la solution qu'on recherche. Les analyses de stabilité séparées occultent ces termes sources, donc le couplage, et par là même se montrent inadaptées aux problèmes couplés. Le problème qui se pose est donc double: mettre au point des méthodes numériques d'intégration pour ces systèmes couplés d'une part, et des méthodes d'analyse de leurs propriétés.

Dans cette section, on tente de répondre à cet ensemble de question pour un problème simple, linéaire et monodimensionnel, pour lequel on peut, d'une part, exhiber des solutions exactes et, d'autre part, prédire assez précisément le comportement des méthodes numériques utilisées pour chacun des champs, afin d'analyser au mieux le comportement de certaines procédures de couplage. Notre but est double: identifier les erreurs d'origine numérique liées au couplage entre fluide et structure, et donner un moyen de les éliminer.

Nous introduisons deux méthodes d'analyse: la première est fondée sur la théorie des équations équivalentes, et la seconde est une analyse de modes propres pour le problème couplé. Ces deux méthodes fournissent des moyens de contrôler les effets négatifs (déphasage, amortissement) des schémas d'intégration du système couplé. Ensuite, on passe à une autre méthode d'analyse numérique, fondée sur des formulations énergétiques. Cette analyse peut donc porter sur l'immense majorité des cas où les modes propres couplés sont inconnus. Nous présentons plusieurs algorithmes d'intégration en temps, nous étudions leur précision, leur stabilité et leur efficacité, en considérant également les apports possibles du calcul parallèle et hétérogène, et du sous-cyclage.

Bien que l'étude théorique de ces algorithmes soit menée pour le problème à une dimension du piston, certaines conclusions tirées de cette étude seront confirmées dans la partie suivante par la simulation numérique plus complexe de la réponse aéroélastique d'un panneau flexible dans un écoulement bidimensionnel en régime transsonique non-linéaire.

Le problème modèle considéré dans [2] est un des plus simples qu'on puisse imaginer. Il s'agit d'une chambre monodimensionnelle (voir Figure 1) contenant un gaz parfait ( $\gamma =$

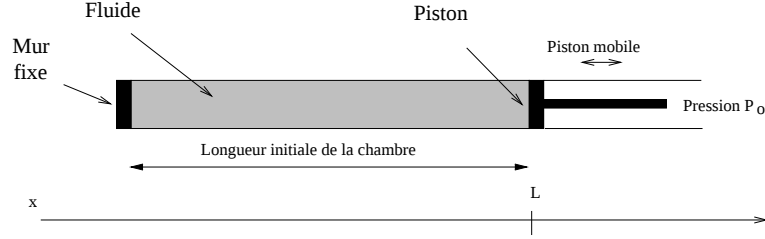


FIG. 1 – Le modèle de piston 1D.

1.4), fermée par un piston mobile (position  $L + y(t)$ ) et dans une pression ambiante égale à  $P_0$ . Le modèle utilisé pour le fluide est le système des équations d'Euler en une dimension d'espace

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x = 0, \\ E_t + [u(E + P)]_x = 0. \end{cases} \quad t \geq 0, x \in ]0, L + y(t)[, \quad (6)$$

où  $\rho$ ,  $u$ ,  $P$  et  $E$  sont respectivement la masse volumique, la vitesse, la pression (donnée par la loi d'état des gaz parfaits  $P = (\gamma - 1)(E - 1/2 \rho u^2)$ ) et l'énergie volumique du fluide. Pour le piston, le seul degré de liberté est son déplacement  $y(t)$  par rapport à sa position de référence  $L$ , solution de l'équation du second ordre

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = P(L + y(t)) - P_0, \quad (7)$$

où  $m$ ,  $d$  et  $k$  sont respectivement la masse, l'amortissement et la raideur du piston. Les conditions aux limites pour le fluide sont  $u(0) = 0$  et  $u(L + y(t)) = \dot{y}$  (adhérence à chaque extrémité).

On choisit pour simplifier encore de linéariser le problème autour de sa configuration d'équilibre où l'écoulement est uniforme et inerte ( $P = P_0$ ,  $\rho = \rho_0$  et  $u = 0$ ), et le piston est immobile ( $y = 0$ ). On suppose de plus que les petites perturbations autour de l'équilibre sont isentropiques. On a alors le problème suivant pour les perturbations  $\rho$ ,  $u$  et  $y$ :

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho_0 u \end{pmatrix}, \quad W_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0^2 & 0 \end{pmatrix} W_x = 0, \quad t \geq 0, x \in ]0, L[, \\ u(0) &= 0, \quad u(L) = \dot{y}, \\ m\ddot{y} + d\dot{y} + ky &= c_0^2 \rho(L), \end{aligned} \quad (8)$$

où  $c_0^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ . Dans le système précédent, il n'y a aucune dissipation d'énergie si  $d = 0$ . Pour  $d = 0$ , on trouve facilement des solutions oscillantes de (8) pour les pulsations propres  $\omega$  vérifiant

$$(m\omega^2 - k) \tan\left(\frac{\omega L}{c_0}\right) = \rho_0 c_0 L. \quad (9)$$

La solution étant oscillante et d'amplitude constante, il sera aisé de comparer la solution exacte à une solution approchée obtenue numériquement en utilisant un algorithme de couplage donné. Plus précisément, un algorithme de couplage précis devrait reproduire une amplitude constante et une pulsation proche de la plus basse pulsation propre solution de (9).

Du point de vue numérique, ce problème modèle linéaire ne nécessite pas de mouvement de maillage, sauf peut-être pour l'interface mobile. On choisit une méthode de volumes finis avec schéma décentré. D'autre part, le mouvement du point d'interface reste virtuel, et

le changement de volume de la dernière cellule fluide est compensé par un flux de transpiration [33]. Classiquement, les schémas numériques décentrés (en volumes finis ou en différences finies) produisent de la diffusion numérique. Les solutions obtenues numériquement n'ont *a priori* aucune raison d'être à amplitude constante. Les effets de dispersion numérique devraient par ailleurs modifier la pulsation propre du système. Le but de l'étude présentée en [2] est alors de prédire qualitativement et si possible quantitativement la solution numérique obtenue simplement à partir des schémas numériques utilisés pour chaque sous-systèmes et de l'algorithme de couplage choisi.

### Méthode des équations équivalentes: (Publication [2])

Une première idée consiste à remplacer l'équation aux dérivées partielles vérifiées par les perturbations du fluide (8) par l'équation équivalente [2, 73] dérivant du schéma décentré utilisé pour la résoudre. On intègre de cette façon certaines propriétés qualitatives de la méthode numérique utilisée dans le domaine fluide. Dans la suite, on se limite au cas  $k = 0$ .

Par exemple, pour un schéma décentré du premier ordre avec un schéma en temps explicite d'ordre 1, on obtient, à la place de l'équation acoustique, l'équation équivalente au premier ordre suivante:

$$W_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0^2 & 0 \end{pmatrix} W_x = \mu W_{xx}, \quad \mu = \frac{c_0 \Delta x}{2} (1 - \nu),$$

où  $\Delta x$  est le pas d'espace (supposé constant) et  $\nu$  le nombre de Courant ( $\nu = c_0 \Delta t / \Delta x$ ) utilisés. On peut alors s'intéresser au couplage de cette équation équivalente soit avec l'équation "continue" de la structure, soit avec un schéma discret pour la structure.

Pour l'équation continue, on peut retrouver une solution dont la dépendance en temps est en  $\exp(at)$ , où  $a = z(\mu z - c_0)$  et  $z$  est une pulsation complexe solution d'une autre équation transcendante, qui provient simplement des relations de couplage et de l'équation du mouvement de la structure. Pour  $\mu = 0$ , on retrouve  $z = i\omega/c_0$ . On peut montrer que l'apparition de la viscosité numérique  $\mu$  ne modifie les pulsations propres du système qu'au deuxième ordre et a le même effet qu'un amortissement  $\beta$  dans le piston ( $\beta$  est donné par  $\beta = 2m\Re(a)$ ). Le développement de  $\beta$  en  $\mu$  obtenu est alors

$$\beta = \frac{2m\omega^2}{c_0^2} (1 - D) \mu + O(\mu^2), \text{ avec } D^{-1} = 1 + \frac{\rho_0 L}{m} \left( 1 + \frac{m^2 \omega^2}{\rho_0^2 c_0^2} \right). \quad (10)$$

Une étude similaire peut être menée sur des schémas plus précis et d'autres schémas en temps, toujours à partir de l'équation équivalente.

L'analyse précédente ne prend pas en compte la discrétisation en temps de l'équation du mouvement du piston, à savoir le schéma et les forces de pression utilisés. Pour chaque schéma choisi, on peut alors réécrire une équation transcendante donnant  $a$  et  $z$  (concrètement, les conditions aux limites pour le fluide fixent le mouvement du piston en fonction de  $z$ ,  $\mu$  et du temps; l'équation du mouvement du piston est alors vérifiée seulement si la relation transcendante est vérifiée). Par exemple, un schéma du type

$$m \frac{\dot{y}^{n+1} - \dot{y}^n}{\Delta t} = \Delta P^n(L),$$

donnera la nouvelle équation sur  $z$  suivante:

$$m \frac{e^{a\Delta t} - 1}{\Delta t} \sinh(zL) = \rho_0 c_0 \cosh(zL).$$

On peut alors écrire un développement limité de  $z$  pour  $\mu$  et  $\Delta t$  petits, et faire de même pour l'amortissement apparent  $\beta$  du piston. On obtient pour ce schéma simple:

$$\beta = \frac{2m\omega^2}{c_0^2} (1 - D) \mu - m\omega^2 D \Delta t + O(\mu^2, \Delta t^2).$$

Sur des schémas simples, cette approche prédit avec une bonne précision le comportement global de la méthode numérique (une erreur de quelques pourcents sur l'amortissement  $\beta$ ).

### Méthode des modes propres couplés: (Publication [2])

Dans la méthode précédente, on ne prend pas en compte précisément le traitement des conditions aux limites pour le fluide, notamment les flux aux bords pour les traitements faibles. Il faut donc l'intégrer pour espérer prédire plus précisément le résultat d'une simulation numérique du problème couplé.

Sur ce problème extrêmement simple du piston monodimensionnel linéarisé, on cherche alors directement le comportement global de toutes les inconnues discrètes au cours d'une simulation. En fait, on s'intéresse surtout aux modes propres (si l'on choisit de se limiter aux schémas linéaires).

Pour se fixer les idées, considérons un maillage régulier du piston en  $N = L/\Delta x$  cellules. On prend un schéma en volumes finis, explicite d'ordre un en temps et décentré d'ordre un en espace. Il s'écrit pour  $1 \leq i \leq N$ :

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \frac{\Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0.$$

On choisit un flux "miroir" à travers le bord fixe et un flux de transpiration  $\Phi_{N+1/2}^n = {}^t(\rho_0 \dot{y}^*, c_0^2 \rho_N^n)$  pour la paroi mobile. Ici,  $\dot{y}^*$  est une prédiction de la vitesse du piston donnée par  $\dot{y}^* = \dot{y}^{n+\theta}$ , avec la notation (5), où  $\theta$  est un paramètre fixé. Ce genre de choix est classiquement utilisé et argumenté dans la littérature [26]. On prend par exemple le schéma explicite suivant pour la vitesse de la structure:

$$m \frac{\dot{y}^{n+1} - \dot{y}^n}{\Delta t} = c_0^2 \Delta \rho_N^n.$$

L'algorithme global que nous venons de choisir est purement linéaire. L'analyse que nous proposons est simplement une analyse de modes et valeurs propres de l'opérateur linéaire qui transforme les inconnues  $\{W_i^n, i = 1 \dots N, \dot{y}^n\}$  en les inconnues  $\{W_i^{n+1}, i = 1 \dots N, \dot{y}^{n+1}\}$ . On arrive pour ce système à exhiber des modes propres, en s'inspirant de la forme des solutions couplées utilisées pour la méthodes par équations équivalentes. Pour l'algorithme choisi ici, on trouve un vecteur propre pour la valeur  $\lambda$  donnée par

$$\lambda = 1 + \frac{c_0 \Delta t}{\Delta x} (e^{-z \Delta x} - 1),$$

où la pulsation complexe  $z$  est maintenant solution de l'équation suivante:

$$\left[ \frac{\Delta x}{(e^{-z \Delta x} - 1)} + \theta c_0 \Delta t \right] [2 \cosh z x_N + (1 - e^{z \Delta x}) e^{-z x_N}] = \frac{-2m}{\rho_0} \left[ e^{-z x_N} (e^{-z \Delta x} - 1) - \sinh z x_N + \frac{1}{2} e^{-z x_N} (e^{z \Delta x} - 1) \right],$$

avec  $x_N = L - \Delta x/2$ . Quand  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers 0, la solution  $z$  de l'équation précédente tend comme prévu vers  $i\omega/c_0$  où  $\omega$  est solution de (9). Pour  $\Delta t$  et  $\Delta x$  petits (devant  $c_0/\omega$  et  $1/\omega$  respectivement), on peut calculer un développement de  $z$ , puis de l'amortissement apparent  $\beta$ . On trouve ici

$$\beta = \frac{m\omega^2}{c_0} (1 - \nu + D(2\theta\nu - 1)) \Delta x + O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta t \Delta x), \quad (11)$$

où  $\nu = c_0 \Delta t / \Delta x$  est le nombre de Courant dans le fluide et  $D$  est défini en (10). Ainsi, on a bien obtenu un amortissement apparent généré par l'algorithme de couplage et les méthodes numériques utilisées, prenant en compte explicitement le traitement des conditions aux limites.

On retrouve le même développement que celui donné par la méthode des équations équivalentes pour  $\theta = 0$ , ce qui montre que la méthode des équations équivalentes ne sait pas "déphaser" une grandeur (elle revient à prendre  $\dot{y}^* = \dot{y}^n$ ).

Le développement précédent permet aussi d'appréhender qualitativement l'effet de la prédiction sur la vitesse. Par exemple, pour  $\theta > 0$ ,  $\beta > \beta_{\theta=0}$ : augmenter  $\theta$  produit de l'amortissement, ce qui expliquent certains choix courants en simulation numérique d'interactions fluide-structure en général. De même, on peut montrer que l'effet d'une prédiction de la densité pour les flux à l'interface est plutôt déstabilisant.

Enfin, des développements similaires peuvent être obtenus pour des flux aux bords utilisant différentes prédictions, pour d'autres schémas en espace et en temps. Prenons un exemple assez complet: on choisit pour le fluide des flux décentrés d'ordre un et un  $\chi$ -schéma implicite en temps (on utilise les flux  $\Phi_{i+1/2}^{n+\chi}$ , avec la notation (5), à la place des flux explicites  $\Phi_{i+1/2}^n$ ). Ce schéma est inconditionnellement stable dès que  $\chi \geq 1/2$ . On utilise le flux à l'interface fluide-structure  $\Phi_{N+1/2}^{n+\chi} = {}^t(\rho_0 \dot{y}^{n+\theta}, c_0^2 \rho_N^{n+\chi})$ . Enfin, on utilise une force interpolée pour intégrer le piston, à savoir

$$m \frac{\dot{y}^{n+1} - \dot{y}^n}{\Delta t} = c_0^2 \Delta \rho_N^{n+\psi}. \quad (12)$$

Nous venons de décrire une famille d'algorithmes de couplage à trois paramètres  $\chi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ . On peut alors montrer par exemple que la pulsation complexe  $z$  pour cet algorithme tend, lorsque  $\Delta x$  tend vers 0, vers une limite. Celle-ci est indépendante de  $\Delta t$  si et seulement si  $\theta + \psi = 1$ . On trouve pour  $\chi = 1/2$  et  $\theta + \psi = 1$

$$\beta = \frac{m\omega^2}{c_0 \left(1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}\right)} (1 - D) \Delta x + O(\Delta x^2), \quad (13)$$

qui montre que  $\beta$  est toujours positif et que l'algorithme reste toujours stable (pour  $\Delta x$  petit) ce qui était loin d'être évident!).

### Méthode d'énergie: (Publication $\llbracket 1 \rrbracket$ )

On examine encore la stabilité d'algorithmes décalés. On a vu que les méthodes précédentes peuvent permettre d'évaluer la stabilité couplée d'un algorithme donné, en comparant la solution attendue (dans le problème linéaire, on s'attend à des oscillations ni amorties ni amplifiées) avec la solution obtenue. Évidemment, ce genre de comparaison n'est pas faisable quand on ne connaît pas la solution exacte ou les modes propres mis en évidence plus haut.

Ici, on adopte une approche énergétique. On remarque assez facilement que les énergies discrètes du fluide et de la structure sont des formes quadratiques définies positives des inconnues discrètes. L'idée alors est de considérer l'énergie totale et de montrer que sous des conditions de stabilité raisonnable, cette énergie ne peut pas croître. On se sert de cette énergie comme d'une fonction de Lyapunov des inconnues. Elle est décroissante donc bornée, et par conséquent toutes les inconnues numériques le sont aussi.

Le point de départ de la méthode consiste à réécrire le problème couplé comme un système d'équations différentielles ordinaires (du premier ordre). On définit le vecteur d'état  $\mathbb{Q}$  de la structure par  $\mathbb{Q} = {}^t(y, \dot{y})$ , l'équation de la dynamique du piston en (8) (en gardant  $m$ ,  $d$  et  $k$ ) peut se réécrire

$$\dot{\mathbb{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{pmatrix} \mathbb{Q} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_0^2 \rho(L)/m \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Si  $\mathbb{W} = {}^t({}^tW_1, \dots, {}^tW_N)$  est le vecteur des perturbations  $W$  donné en (8), alors (14) peut prendre la forme

$$\dot{\mathbb{Q}} = D\mathbb{Q} + C\mathbb{W}, \text{ avec } \begin{cases} D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -d/m \end{pmatrix}, \\ C = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_0^2/m & 0 \end{pmatrix} \right). \end{cases} \quad (15)$$

Pareillement, avant discrétisation en temps, on peut écrire le même type d'équation pour le champ  $\mathbb{W}$  si l'on utilise par exemple un schéma en volumes finis, avec des flux numériques décentrés d'ordre un, toujours sur un maillage régulier. On écrit après discrétisation en espace

$$\begin{aligned} \Delta x \dot{W}_1 - J_0^+ M_{u=0} W_1 + c_0 W_1 + J_0^- W_2 &= 0, \\ \Delta x \dot{W}_j - J_0^+ W_{j-1} + c_0 W_j + J_0^- W_{j+1} &= 0 \quad 2 \leq j \leq N, \\ \Delta x \dot{W}_N - J_0^+ W_{N-1} + c_0 W_N + J_0^- M_{u=0} W_N + \dot{y} W_0 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

où les matrices  $J_0^+$  et  $J_0^-$  de décentrage, la matrice  $M_{u=0}$  donnant l'état miroir et le vecteur constant  $W_0$  sont donnés par

$$J_0^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ c_0^2 & c_0 \end{pmatrix}, J_0^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -c_0 & 1 \\ c_0^2 & -c_0 \end{pmatrix}, M_{u=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, W_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Les équations semi-discrètes en espace pour le vecteur des inconnues fluides peuvent donc se réécrire sous la forme

$$\dot{\mathbb{W}} = A\mathbb{W} + B\mathbb{Q}, \text{ avec } \begin{cases} A \text{ une matrice tridiagonale non symétrique,} \\ {}^tB = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\rho_0}{\Delta x} & 0 \end{pmatrix} \right). \end{cases} \quad (18)$$

En somme, le problème de Cauchy pour le système complet avant discrétisation en temps s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbb{W}} \\ \dot{\mathbb{Q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{W} \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix} \mathbb{W} \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}_{(t=0)} = \begin{pmatrix} \mathbb{W} \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}_0. \quad (19)$$

Rappelons que dans l'équation précédente la matrice des flux  $A$  n'est pas symétrique. Des méthodes usuelles [34, 6] pour démontrer la stabilité sont alors inutilisables. D'autre part, on s'intéresse à des systèmes physiques supposés stables et on cherche à construire pour ceux-ci des schémas de couplage stables: dans les deux cas, on entend par stabilité "toutes

les grandeurs physiques ou numériques restent bornées". Les idées générales de ce travail prennent leur source dans les trois théorèmes élémentaires qui suivent. Dans la suite, on note  $X$  et  $M$  un vecteur et une matrice réelle. On considère le problème de Cauchy (pour  $t \geq 0$ )

$$\dot{X} = MX, X(0) = X_0. \quad (20)$$

**Définition 1** On dira que la matrice réelle  $M$  est "stable" si et seulement si, pour toute donnée initiale  $X_0$ , la solution de (20) reste bornée.

**Définition 2** On dira qu'une matrice réelle symétrique définie positive  $E_M$  est une matrice d'énergie pour  $M$  si

$$\forall X, \quad X^t E_M M X \leq 0.$$

On a alors les trois théorèmes:

**Théorème 1** Une matrice réelle symétrique définie positive  $E_M$  est une matrice d'énergie pour  $M$  si et seulement si

$$\forall X \text{ solution de } \dot{X} = MX, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} X^t E_M X \right) \leq 0. \quad (21)$$

**Théorème 2** Si il existe une matrice d'énergie pour  $M$ , alors  $M$  est stable.

**Théorème 3** Soient  $A$  et  $D$  deux matrices stables pour lesquelles il existe des matrices d'énergie  $E_A$  et  $E_D$  respectivement. Si  $B$  et  $C$  sont deux matrices réelles telles que

$$E_A B + (E_D C)^t = 0, \quad (22)$$

alors la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est stable.

Les démonstrations de ces théorèmes sont élémentaires. Pour la dernière, il suffit de constater que la matrice  $\begin{pmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_D \end{pmatrix}$  est une énergie pour la matrice couplée  $M$ . L'interprétation physique du Théorème 3 est assez simple. Prenez deux systèmes physiquement stables lorsqu'ils sont séparés. Si vous les coupez de telle sorte que les énergies qu'ils échangent sont exactement opposées, alors vous obtenez un système stable.

Pour le problème du piston linéarisé étudié dans cette section, on peut trouver des énergies pour le fluide et la structure. Pour le fluide, l'énergie discrète  $\mathcal{E}_{fluid}$  peut être retrouvée après linéarisation de l'énergie présente dans les équations d'Euler autour de l'écoulement uniforme (en supposant que le fluide est constant par cellule). On trouve alors

$$\mathcal{E}_{fluid} = \Delta x \sum_{j=1}^{j=N} \left( \frac{c_0^2 \rho_j^2}{2\rho_0} + \frac{\rho_0 u_j^2}{2} \right).$$

$\mathcal{E}_{fluid}$  est bien une forme quadratique définie positive, dont la matrice  $E_A$  correspondante s'écrit:

$$E_A = \frac{\Delta x}{2\rho_0} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} c_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Des calculs assez fastidieux montrent que la matrice  $E_A$  est une matrice d'énergie pour la matrice  $A$  d'évolution du fluide. Ceci est directement relié au fait qu'un schéma linéaire en volumes finis, construit à partir de flux décentrés, produit de la diffusion numérique et donc est stable au moins pour des pas de temps  $\Delta t$  très petits. On verra que ceci est vrai dans un cadre beaucoup plus général que celui-ci.

Pour le piston, l'énergie totale est donnée simplement par  $\mathcal{E}_{piston} = 1/2 ky^2 + 1/2 m\dot{y}^2$ . C'est encore une forme quadratique définie positive de  $\mathbb{Q}$ , dont la matrice correspondante  $E_D$  est

$$E_D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad (24)$$

$E_D$  est une matrice d'énergie pour  $D$  dès que l'amortissement  $d$  est positif ou nul. Pour le système couplé (19), un calcul très simple montre que l'égalité (22) est vérifiée pour  $E_A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $E_D$  données respectivement en (23), (18), (15) et (24). Ceci montre que la solution continue en temps du système couplé (après discrétisation en espace) a toutes ses solutions bornées.

De manière générale, la condition (22) devrait être réalisée pour des problèmes modèles linéaires plus complexes (avec structures linéaires discrétisées en éléments finis) à condition qu'il existe une certaine compatibilité entre les degrés de liberté structuraux et une formulation en volumes finis pour le fluide. Dans un cadre encore plus général, on peut montrer que ce sont les produits scalaires des fonctions de base utilisées dans chacune des formulations fluide et structure qui interviennent et assurent un transfert exact de l'énergie (avant discrétisation en temps) [17].

Forts de ces éléments, nous allons construire des algorithmes décalés *stables* où le fluide et la structure sont intégrés successivement. Comme le problème et les schémas utilisés sont linéaires, nous allons pouvoir montrer que certains algorithmes décalés sont stables dans le sens suivant: pour toute simulation numérique, les inconnues numériques restent bornées au cours des itérations en temps. On obtient une stabilité de type  $L^2$  discrète toujours à partir d'inégalités d'énergies discrètes.

Nous construisons des algorithmes décalés à partir de  $\theta$ -schémas implicites pour le fluide et la structure. On montre très simplement le

**Lemme 3** *Soit  $M$  une matrice réelle stable pour laquelle il existe une matrice d'énergie. Si  $\theta \geq 1/2$  alors, pour l'intégration en temps de (20), le schéma suivant est stable:*

$$X^{n+1} = X^n + \Delta t M X^{n+\theta}.$$

*Preuve.* La démonstration est élémentaire. Elle repose sur l'existence supposée d'une matrice d'énergie  $E_M$  pour  $M$ . Soit  $E^n = 1/2 {}^t X^n M X^n$  l'énergie à l'instant  $n$ . À partir de l'identité précédente, on montre que  $X^n = X^{n+\theta} - \theta \Delta t M X^{n+\theta}$  et  $X^{n+1} = X^{n+\theta} + (1 - \theta) \Delta t M X^{n+\theta}$ . On en déduit donc

$$E^{n+1} - E^n = \Delta t {}^t X^{n+\theta} E_M M X^{n+\theta} + (1 - 2\theta) \Delta t {}^t X^{n+\theta} M E_M M X^{n+\theta}.$$

L'énergie est donc décroissante pour tout  $\Delta t$  dès que  $\theta \geq 1/2$ . Elle est donc bornée, ainsi que les  $X^n$  puisque  $E_M$  est réelle symétrique définie positive.

Le schéma précédent est implicite dès que  $\theta > 0$ . Il est consistant et même du second ordre pour  $\theta = 1/2$ . En utilisant le même type de démonstration appliquée à  $A$  ou  $D$ , et

en supposant de plus que le système couplé est stable et vérifie (22) pour des énergies liées à  $A$  et  $D$ , on obtient les résultats suivants:

**Théorème 4** *Pour  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ , le schéma implicite/implicite décalé*

$$\begin{cases} \frac{\mathbb{W}^{n+1} - \mathbb{W}^n}{\Delta t} &= (A + \frac{\Delta t}{2}BC) \mathbb{W}^{n+\frac{1}{2}} + B\mathbb{Q}^n \\ \mathbb{Q}^{n+1} &= \mathbb{Q}^n + \Delta t C \mathbb{W}^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{\mathbb{Q}^{n+1} - \mathbb{Q}^*}{\Delta t} &= D((1-\alpha)\mathbb{Q}^* + \alpha\mathbb{Q}^{n+1}) \end{cases} \quad (25)$$

*est inconditionnellement stable.*

Le schéma ainsi obtenu est seulement d'ordre un, bien que les deux intégrateurs soient d'ordre deux quand  $\alpha = 1/2$ . Il faut noter qu'ici la stabilité inconditionnelle est obtenue pour un schéma décalé sans utiliser de technique d'augmentation [54, 21] (où l'un des champs est exprimé en fonction de l'autre). Dans l'algorithme décalé (25), on doit seulement calculer en plus le produit de matrices creuses  $BC$ .

**Théorème 5** *Pour  $1/2 \leq \alpha \leq 1$  et  $1 \leq \mathbf{n}$ , la version sous-cyclée de l'algorithme implicite/implicite décalé (25) est inconditionnellement stable:*

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^{n+1(0)} &= \mathbb{W}^n \\ \mathbb{Q}^{n(0)} &= \mathbb{Q}^n \\ \{ & \\ & \text{Pour } k = 0, \dots, \mathbf{n} - 1 \\ & \mathbb{W}^{n+1(k+1)} = \mathbb{W}^{n+1(k)} + (\Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2}BC) \mathbb{W}^{n+1(k+\frac{1}{2})} + \Delta t B \mathbb{Q}^{n(k)} \\ & \mathbb{Q}^{n(k+1)} = \mathbb{Q}^{n(k)} + \Delta t C \mathbb{W}^{n+1(k+\frac{1}{2})} \\ & \} \\ \mathbb{W}^{n+1} &= \mathbb{W}^{n+1(\mathbf{n})} \\ \mathbb{Q}^{n+1} &= \mathbb{Q}^{n(\mathbf{n})} + \mathbf{n} \Delta t D \left( (1-\alpha)\mathbb{Q}^{n(\mathbf{n})} + \alpha\mathbb{Q}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

L'entier  $\mathbf{n}$  est un paramètre de sous-cyclage (on intègre le champ  $\mathbb{W}$   $\mathbf{n}$  fois plus souvent que le champ  $\mathbb{Q}$ ). Ce type d'algorithme peut être très efficace lorsque les échelles de temps dans le fluide et la structure sont différentes (ou si les contraintes sur la stabilité des schémas utilisés sont elles aussi différentes). On peut noter que dans l'algorithme (26) chaque mise à jour de la quantité  $\mathbb{Q}^{n(k+1)}$  a un coût très faible. Ces mises à jour permettent de construire une approximation de l'intégrale en temps  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} C \mathbb{W} dt$ .

**Théorème 6** *Pour  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ , le schéma implicite/explicite*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{n+1} &= \mathbb{Q}^n + \Delta t D \mathbb{Q}^{n+\alpha} + \Delta t C \left( \mathbb{W}^n + \Delta t A \mathbb{W}^n + \frac{\Delta t}{2} B \mathbb{Q}^{n+\alpha} \right) \\ \mathbb{W}^{n+1} &= \mathbb{W}^n + \Delta t A \mathbb{W}^n + \Delta t B \mathbb{Q}^{n+\alpha} \end{aligned} \quad (27)$$

*est stable si le schéma explicite est stable pour le pas de temps considéré (dans le cas d'un problème découplé).*

Le schéma (27) est la dernière construction proposée ici de schéma décalé pour lequel on sait prédire une certaine stabilité. La démonstration tient encore à des considérations énergétiques, ce qui explique l'allure peu intuitive des termes de correction de  $\mathbb{Q}^{n+1}$ . Il faut aussi noter que la stabilité de l'algorithme (27) ne semble pas conservée lorsqu'on sous-cycle, ce qui le rend moins général que (25)-(26).

L'analyse de stabilité fondée sur une énergie produit des résultats intéressants dans un nombre restreint de cas. Pour ces quelques cas, on voit que l'organisation interne de chaque solveur et les couplages sont déterminants. Il en va de même pour la précision et l'efficacité de l'algorithme de couplage, qui sont plus facilement contrôlables. On trouvera dans [1] une discussion sur l'erreur de troncature de chacun des champs et sur l'efficacité pour plusieurs types d'algorithmes de couplage, notamment pour des algorithmes où le fluide et la structure peuvent être intégrés parallèlement, ce qui peut amener des gains substantiels en performance [10][19].

### 1.3 Extension à un problème non-linéaire

*Thèse et Publication [4]*

On a vu dans la section précédente que la construction d'algorithmes de couplage stables et efficaces peut s'avérer complexe, même dans le cas apparemment très simple du piston linéaire. Nous cherchons ici à faire la transition vers des problèmes non-linéaires, et plus particulièrement, nous recherchons les principes généraux que devraient encore suivre des algorithmes de couplage performants.

On repart du même problème modèle, celui du piston monodimensionnel (avant linéarisation), présenté en Figure 1. Les équation d'Euler (6) sont posées pour des temps positifs et sur un intervalle dépendant du temps  $]0; L + y(t)[$ , où  $y$  est le déplacement du piston. Les conditions aux limites pour le fluide sont  $u(0, t) = 0$  et  $u(L + y(t), t) = \dot{y}$ . L'équation du mouvement du piston est

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = P(L + y(t)) - P_0,$$

où  $m$ ,  $d$  et  $k$  sont respectivement la masse, l'amortissement et la raideur du piston.

#### Méthodes numériques:

Pour faire une simulation numérique de ce problème, nous utilisons une formulation ALE des équations d'Euler 1D, plus précisément nous allons adapter une méthode de volumes finis aux maillages dynamiques. On repart de la forme intégrale des équation en formulation ALE (2), où  $C_x$  est un volume fini déformable.  $W$  est le vecteur des variables conservatives  $(\rho, \rho u, E)^t$  et  $\bar{F}$  est le flux modifié pour l'ALE:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \rho \bar{u} \\ \rho u \bar{u} + P \\ E \bar{u} + Pu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{u} = u - w.$$

On obtient par exemple un schéma explicite en écrivant

$$A_i^{n+1} W_i^{n+1} - A_i^n W_i^n + \Delta t (\bar{\Phi}(W_i^n, W_{i+1}^n) - \bar{\Phi}(W_{i-1}^n, W_i^n)) = 0, \quad (28)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps et  $A_i^n$  l'aire de la cellule  $C_i^n$  à l'instant  $t^n$ . La fonction de flux numérique  $\bar{\Phi}$  que nous avons choisie est fondée sur les flux de Van Leer [71] réécrits en maillage mobile [5]. Enfin, pour simplifier, nous avons choisi de garder un maillage uniforme à chaque instant, sous la forme

$$x_i^n = \frac{i-1}{N-1}(L + X^n), \quad w_i^n = \frac{i-1}{N-1} \dot{X}^n, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (29)$$

Le système couplé ne peut plus s'écrire sous la forme linéaire (19). Pour ce qui est des algorithmes de couplage, on voit assez rapidement que les algorithmes proposés dans la section précédente ne sont pas directement applicables, puisque la matrice  $B$  au moins est maintenant remplacée par un opérateur très complexe; un mouvement de la structure a une influence sur tout le mouvement de maillage.

### Algorithmes:

Pour le couplage effectif du fluide et de la structure, on est donc ramené à des algorithmes déjà proposés en page 8 et suivantes. On peut alors essayer de réinterpréter les conclusions de l'analyse de stabilité par une méthode d'énergie de la section précédente, notamment en termes de conservation. Pour le piston linéaire, on a su démontrer la stabilité du système couplé et de certains schémas décalés à partir du moment où l'hypothèse (22) d'égalité des énergies échangées était vérifiée. Pour le piston non-linéaire, nous pouvons chercher à relier les performances d'un algorithme donné à ses propriétés de conservation globale.

On considère d'abord un algorithme de couplage assez classique:

1. Calculer la pression  $P_N^n$  sur le piston à l'instant  $t^n$ .
2. Avancer la structure de  $\Delta t_S$  avec la règle du trapèze par exemple.
3. A partir du déplacement de la structure à l'instant  $t^{n+1}$ , en déduire la position et le mouvement des points du maillage fluide en utilisant (29). En cas de sous-cycles pour le fluide, la vitesse d'un point du maillage est supposée constante et égale à la vitesse moyenne.
4. Avancer la fluide de  $t^n$  à  $t^{n+1}$ , éventuellement avec de nombreux sous-cycles. Le nombre de sous-cycles  $\mathbf{n}$  est approché par  $\mathbf{n} = \Delta t_S / \Delta t_F$ .

Pour cet algorithme, on s'intéresse à l'énergie globale  $\mathbf{E}$  du système, somme de l'énergie totale du fluide  $\mathbf{E}_F$  et de la structure  $\mathbf{E}_S$ . Avant discrétisation spatiale, on a:

$$\mathbf{E}(t) = \overbrace{\int_0^{L+X(t)} E(t,x) dx}^{\mathbf{E}_F(t)} + \overbrace{\frac{1}{2} m \dot{X}(t)^2 + \frac{1}{2} k X(t)^2}^{\mathbf{E}_S(t)}.$$

Après discrétisation, on récupère la décomposition d'énergies discrètes suivante:

$$\mathbf{E}^n = \overbrace{\sum_{i=1}^N A_i^n E_i^n}^{\mathbf{E}_F^n} + \overbrace{\frac{1}{2} m \dot{X}^{n2} + \frac{1}{2} k X^{n2}}^{\mathbf{E}_S^n}.$$

La règle du trapèze nous donne la variation de l'énergie de la structure (pour une autre méthode de Newmark stable ou une  $\alpha$ -méthode [10], de la diffusion numérique est ajoutée) simplement par

$$\mathbf{E}_S^{n+1} - \mathbf{E}_S^n = P_N^n (X^{n+1} - X^n).$$

Pour le fluide, la variation d'énergie totale au cours du  $k^{\text{ième}}$  sous-cycle dépend seulement des flux d'énergie aux bords, puisqu'on utilise une méthode conservative (28). Elle vaut:

$$\mathbf{E}_F^{n,k+1} - \mathbf{E}_F^{n,k} = -\Delta t_F P_N^{n,k} w_N^{n,k} = -\frac{1}{\mathbf{n}} P_N^{n,k} (X^{n+1} - X^n),$$

où l'exposant  $n, k$  se réfère au  $k^{\text{ième}}$  sous-cycle dans le  $n^{\text{ième}}$  pas de temps couplé. La variation de l'énergie du fluide sur un pas de temps couplé est alors donnée par

$$\mathbf{E}_F^{n+1} - \mathbf{E}_F^n = -\frac{1}{\mathbf{n}} \left[ \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} P_N^{n,k} \right] (X^{n+1} - X^n).$$

La variation d'énergie totale du système est alors

$$\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n = \frac{1}{\mathbf{n}} \left[ \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} (P_N^n - P_N^{n,k}) \right] (X^{n+1} - X^n).$$

Comme la pression varie au cours des sous-cycles, la variation d'énergie totale ci-dessus n'est jamais nulle. Ainsi, notre système physiquement isolé reçoit ou perd de l'énergie (et ceci malgré l'utilisation d'une méthode conservative). On peut montrer que cette erreur en énergie dépend du pas de temps  $\Delta t_S$  et du nombre de sous-cycles  $\mathbf{n}$ , et qu'elle a une influence considérable sur la qualité des résultats numériques.

Cette erreur peut être contrôlée pour d'autres types d'algorithmes, comme celui-ci:

1. Calculer une prédiction de la position de la structure à  $t^{n+1}$ .
2. A partir de cette prédiction du déplacement de la structure à l'instant  $t^{n+1}$ , en déduire la position et le mouvement des points du maillage fluide en utilisant (29). En cas de sous-cycles pour le fluide, la vitesse d'un point du maillage est supposée constante et égale à la vitesse moyenne.
3. Avancer la fluide de  $t^n$  à  $t^{n+1}$ , éventuellement avec des sous-cycles. Le nombre de sous-cycles  $\mathbf{n}$  est approché par  $\mathbf{n} = \Delta t_S / \Delta t_F$ . Calculer l'intégrale en temps des termes de pression  $P_N^{n,k}$ . La force exercée sur le fluide pendant le pas de temps couplé  $\Delta t_S$  vaut alors:

$$Force[\text{Piston} \rightarrow \text{Fluide}] \stackrel{\text{calcul}}{=} -\frac{\Delta t_S}{\mathbf{n}} \left[ \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} P_N^{n,k} \right].$$

4. Avancer la structure de  $\Delta t_S$  avec la règle du trapèze, en utilisant la force précédemment calculée, de façon à vérifier exactement le principe d'action et de réaction.

Si l'on reprend les calculs de la variation d'énergie, on montre qu'elle est donnée par

$$\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n = \frac{1}{\mathbf{n}} \left[ \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} P_N^{n,k} \right] (\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n),$$

où  $\varepsilon^{n+1} = X^{n+1} - \widetilde{X^{n+1}}$  est l'écart entre la position de la structure à l'instant  $t^{n+1}$  et la prédiction  $\widetilde{X^{n+1}}$  (faite au début du pas de temps).

Si l'erreur sur la prédiction est petite (ce qui peut être le cas de manière peu chère si le mouvement de la structure est relativement régulier), alors l'énergie totale sera conservée avec une assez bonne précision. On montre que cet algorithme est de ce fait bien supérieur au premier, notamment en termes de stabilité et de précision. Cependant, il a un défaut: le bord du fluide et de la structure ne coïncident jamais, on a relaxé la condition d'adhérence entre le domaine fluide et la structure [11]. On notera néanmoins que des discrétisations en espace différentes pour le fluide et la structure produisent nécessairement des maillages non coïncidant pour lesquels des correspondances doivent être établies de toute façon [46].

## Interprétation et principes généraux:

L'idée générale dans le cas linéaire était la conservation exacte de l'énergie pour le problème continu en temps, malgré des discrétisations en espace éventuellement différentes. Ensuite, il peut exister des algorithmes décalés qui assurent que l'énergie totale n'augmente pas.

Dans le cas non-linéaire, on suit toujours l'idée de conserver au mieux l'énergie totale. Même sur le cas très simple du piston, on constate que la qualité de l'algorithme (stabilité, fiabilité des résultats) semble être directement reliée aux productions et destructions artificielles d'énergie et de quantité de mouvement à l'interface.

Nous tenons ici un critère assez général pour la construction d'algorithmes de couplage: sa qualité devrait être directement reliée à la conservation générale de l'énergie. Pour ce qui est des discrétisations en espace, la conservation de l'énergie (qui correspond à la formule (22)) a déjà été examinée [17]. Pour les discrétisations en temps, nous proposons dans la suite une méthode d'évaluation des algorithmes de couplage. Notons ici que nous n'avons pas considéré d'algorithmes où plusieurs cycles "prédiction structure"  $\rightarrow$  "Intégration fluide"  $\rightarrow$  "Intégration structure" sont parcourus à chaque pas de temps. Pour ceux-ci, si la convergence est atteinte (ils sont alors équivalents à des schémas de couplage monolithiques avec résolution itérative), la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement est alors exacte.

### 1.4 Évaluation d'un algorithme de couplage

*Publication [8]*

Nous présentons ici une tentative d'évaluation des algorithmes de couplage, fondée sur les principes généraux que nous avons pu dégager du modèle linéaire précédent. Nous restons toujours dans le même cadre, à savoir celui des méthodes décalées où le fluide et la structure sont avancées en temps séparément (parallèlement ou successivement) [18, 64, 47, 25]. Les méthodes couramment employées sont malheureusement moins précises que prévu et parfois beaucoup moins stables. Nous avons vu aussi que certains gros défauts des méthodes décalées peuvent être corrigés dans une certaine mesure par l'adjonction de prédictions/corrections dans l'algorithme.

#### Une évaluation fondée sur la conservation de l'énergie:

Nous cherchons ici à évaluer quantitativement un algorithme de couplage donné. La méthode que nous proposons est fondée sur l'énergie du système, et plus précisément sur l'erreur de conservation de l'énergie à l'interface fluide-structure. En effet, à cause du décalage, les travaux des forces mutuellement exercées par le fluide et la structure ne sont pas exactement opposés (sauf pour des algorithmes monolithiques ou itératifs). Il s'agit ici plutôt d'une étude temporelle de non conservation, dont la version spatiale pour des maillages non coïncidants a déjà été examinée [17]. Pour simplifier l'analyse, on considère un point générique de l'interface fluide-structure  $\Gamma_{F/S}$ , associé à une longueur (resp. surface) unitaire en deux (resp. trois) dimensions d'espace. On note  $\mathbf{P}$  la pression en ce point et on se limite à un écoulement non visqueux pour simplifier l'expression des forces fluides.

On considère une famille d'algorithmes dits "synchrones" pour lesquels le fluide et la structure sont évalués aux mêmes instants. L'intégration sur l'intervalle  $[t^n, t^{n+1}]$  est

décomposée en les étapes suivantes:

1. Prédiction du déplacement de la structure à l'instant  $t^{n+1}$

$$\mathbf{u}^{n+1p} = \mathbf{u}^n + \alpha_0 \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}^n + \alpha_1 \Delta t_S (\dot{\mathbf{u}}^n - \dot{\mathbf{u}}^{n-1}). \quad (30)$$

où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont deux paramètres (la prédiction est d'ordre un si  $\alpha_0 = 1$ , et d'ordre deux si de plus  $\alpha_1 = 1/2$ ).

2. Transfert du mouvement de l'interface fluide-structure vers le fluide.
3. Mise à jour du maillage fluide  $\mathbf{x}^{n+1}$ , pour coïncider avec la prédiction  $\mathbf{u}^{n+1p}$ . Intégration du fluide de  $t^n$  à  $t^{n+1} = t^n + \Delta t_S$  avec un pas de temps  $\Delta t_F \leq \Delta t_S$  (et éventuellement du sous-cyclage avec vitesse constante des sommets du maillage pendant les sous-cycles [18, 42]).
4. Transfert d'un champ de pression  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  vers la structure. Calcul des charges induites  $\mathbf{f}_{F/S}^{n+1}$ .
5. Intégration de la structure de  $t^n$  à  $t^{n+1} = t^n + \Delta t_S$  (règle du trapèze).

Il est important de noter que  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  est un champ de pression envoyé à la structure après l'intégration en temps de  $t^n$  à  $t^{n+1}$ .  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  n'est pas nécessairement choisi égal à la pression  $\mathbf{P}^{n+1}$  du fluide à l'instant  $t^{n+1}$ .

On examine en détail les énergies échangées par le fluide et la structure. En supposant que le maillage fluide a une vitesse constante sur  $[t^n, t^{n+1}]$ , on montre facilement que l'énergie reçue par le fluide à travers un élément d'interface est donnée par

$$\Delta E_F^{n+1} = -{}^t\mathbf{P}_F^{n+1} (\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n). \quad (31)$$

$\mathbf{P}_F^{n+1}$  dépend du schéma en temps utilisé pour le fluide (en fait des flux aux bords utilisés). Par exemple,  $\mathbf{P}_F^{n+1} = \mathbf{P}^n$  pour un schéma explicite,  $\mathbf{P}_F^{n+1} \sim (\mathbf{P}^n + \mathbf{P}^{n+1})/2$  pour un schéma d'ordre deux, etc...

Réciproquement, si la structure est intégrée en temps avec la règle du trapèze

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t_S (\dot{\mathbf{u}}^n + \dot{\mathbf{u}}^{n+1})/2, \\ \dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t_S (\ddot{\mathbf{u}}^n + \ddot{\mathbf{u}}^{n+1})/2, \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{P}_S^{n+1}, \end{cases}$$

la variation d'énergie  $E_S = 1/2 \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + 1/2 \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$  de la structure est donnée par

$$E_S^{n+1} - E_S^n = \left( \frac{\mathbf{P}_S^n + \mathbf{P}_S^{n+1}}{2} \right)^T (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \Delta t_S \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}T} \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}},$$

où  $\dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = (\dot{\mathbf{u}}^n + \dot{\mathbf{u}}^{n+1})/2$ . Le premier terme dans l'équation précédente représente l'énergie transférée du fluide vers la structure (le second étant un terme de dissipation interne de la structure). Cette énergie est donc donnée par

$$\Delta E_S^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{P}_S^n + \mathbf{P}_S^{n+1}}{2} \right)^T (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n). \quad (32)$$

Des équations (31) et (32) on déduit simplement qu'en général, la procédure étudiée ne peut réaliser  $\Delta E_F^{n+1} + \Delta E_S^{n+1} = 0$ , puisque la prédiction (30) n'est pas exacte et de plus  $\mathbf{u}^{n+1}$  est calculée après que  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  a été évaluée.

Pour un algorithme donné, on se propose donc d'évaluer la production numérique d'énergie  $\Delta E_F^{n+1} + \Delta E_S^{n+1}$ , due au caractère décalé de l'algorithme de couplage, pour un élément d'interface fluide-structure. On s'intéresse plus précisément à l'accumulation d'énergie

créée artificiellement dans un cas particulier où la structure vibre à amplitude constante  $\mathbf{u}_0$  avec une pulsation  $\omega$  ( $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \cos(\omega t)$ ), la pression fluide sur  $\Gamma_{F/S}$  oscille avec la même pulsation, mais avec un déphasage  $\varphi$  ( $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ). Ce cadre permet de prédire le comportement d'un algorithme de couplage dans une configuration où le système physique est proche de l'instabilité, puisqu'il oscille de façon non amortie. On suppose de plus que le fluide et la structure sont intégrés en temps avec des pas de temps constants égaux à  $\Delta t_F$  et  $\Delta t_S$ , respectivement. On définit deux paramètres scalaires  $k$  et  $d$ , qui peuvent être interprétés en termes de masse, amortissement et rigidité ajoutés, par

$$k = \mathbf{u}_0^T \mathbf{P}_0 \cos \varphi, \quad d = \mathbf{u}_0^T \mathbf{P}_0 \sin \varphi.$$

Pour illustrer ce cadre d'évaluation d'algorithmes, on considère une procédure très simple où  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n$  ( $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ ),  $\mathbf{P}_S^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1}$  (on envoie à la structure la pression la plus récente),  $\mathbf{P}_F^{n+1} = \mathbf{P}^n$  (schéma Euler explicite pour le fluide) et sans sous-cyclage ( $\Delta t_F = \Delta t_S = \Delta t$ ). On a

$$\begin{aligned} \Delta E_F^{n+1} &= -\mathbf{P}^{nT} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \\ &= [k \cos(\omega t^n) - d \sin(\omega t^n)] (\cos(\omega t^{n-1}) - \cos(\omega t^n)). \end{aligned}$$

On définit  $T_\omega = 2\pi/\omega$  et  $h = \omega \Delta t$ . L'énergie  $\Delta E_F^{\frac{NT_\omega}{\Delta t}}$  reçue par le fluide sur l'intervalle  $[0, N \times T_\omega]$  peut être estimée, quand  $N/h$  est assez grand, par

$$\Delta E_F^{\frac{NT_\omega}{\Delta t}} \sim N\pi \delta E_F, \text{ avec } \delta E_F = \frac{1}{h} [k (\cos(h) - 1) - d \sin(h)]. \quad (33)$$

Si  $h \equiv \omega \Delta t \ll 1$ , on obtient le développement suivant pour  $\delta E_F$ :

$$\delta E_F = -k \left( \frac{h}{2} - \frac{h^3}{24} \right) - d \left( 1 - \frac{h^2}{6} \right) + O(h^4).$$

On peut obtenir un développement similaire pour  $\Delta E_S^{\frac{NT_\omega}{\Delta t}}$ , qui dépend bien évidemment de l'algorithme envisagé. Pour l'algorithme simple considéré ici, on trouve

$$\Delta E_S^{\frac{NT_\omega}{\Delta t}} \sim N\pi \delta E_S, \text{ avec } \delta E_S = -kh + d(1 - \frac{2h^2}{3}) + O(h^3). \quad (34)$$

On déduit des équations (33)-(34) que pour l'exemple d'algorithme choisi, l'énergie totale créée artificiellement sur un élément d'interface fluide-structure est donnée par

$$\Delta E_F^{\frac{NT_\omega}{\Delta t}} + \Delta E_S^{\frac{NT_\omega}{\Delta t}} = N\pi(-k\frac{3h}{2}) + O(h^2).$$

Le paramètre  $\delta E \equiv \delta E_F + \delta E_S$ , exprimé en fonction de  $k$ ,  $d$  et  $h$  fournit de nombreuses informations quantitatives et qualitatives sur l'algorithme de couplage envisagé: amortissement numérique positif ou négatif, précision en temps long, etc... Il est le point central de l'évaluation des algorithmes de couplage que nous proposons.

Nous ne reproduisons pas ici les évaluations des paramètres  $\delta E_F$  et  $\delta E_S$  correspondants à différents schémas en temps pour le fluide et la structure. Pour résumer, on trouve que le paramètre  $\delta E$  est en  $O(h)$ ,  $O(h^2)$  et  $O(h^3)$  respectivement pour des prédictions d'ordre zéro ( $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ ), d'ordre un ( $\alpha_0 = 1$ ) et d'ordre deux ( $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = 1/2$ ) pour des schémas en temps et une pression transmise à la structure  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  bien choisis.

### Analyse pour des algorithmes de type saute-mouton:

On considère ici une famille d'algorithmes décalés pour lesquels le fluide et la structure ne sont pas évalués aux mêmes instants, mais respectivement aux instants  $t^{n-\frac{1}{2}}$  et  $t^n$ . Ces méthodes [42] permettent de vérifier la continuité des déplacements et des vitesses à l'interface fluide-structure

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} & \text{sur } \Gamma_{F/S}, \\ \dot{\mathbf{x}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^{n+1} & \text{sur } \Gamma_{F/S}, \end{cases}$$

en préservant les volumes et le caractère conservatif des schémas [66, 42]. L'algorithme est le suivant:

1. Prédiction du déplacement de la structure à l'instant  $t^{n+\frac{1}{2}}$

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t_S}{2} \dot{\mathbf{u}}^n.$$

2. Mise à jour du maillage fluide  $\mathbf{x}^{n+\frac{1}{2}}$  coïncidant sur  $\Gamma_{F/S}$  avec le déplacement prédit  $\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}$ . Puis intégration en temps de  $t^{n-\frac{1}{2}}$  à  $t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t_S$  avec un pas de temps égal à  $\Delta t_F \leq \Delta t_S$  (et éventuellement du sous-cyclage).
3. Transfert d'un champ de pression  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  vers la structure. Calcul des charges induites  $\mathbf{f}_{F/S}^{n+1}$ .
4. Intégration de la structure de  $t^n$  à  $t^{n+1} = t^n + \Delta t_S$  (règle du trapèze).

On peut comme précédemment évaluer les paramètres  $\delta E_F$ ,  $\delta E_S$  et  $\delta E \equiv \delta E_F + \delta E_S$  pour chaque choix de schéma en temps. On montre alors que l'on peut trouver dans cette famille des méthodes d'ordre deux ou trois en énergie, (i.e. telles que  $\delta E = O(h^2)$  ou  $\delta E = O(h^3)$ ).

### Résultats numériques:

Sur un cas-test de panneau soumis à un écoulement supersonique bidimensionnel non visqueux et à la limite du flottement, on cherche à vérifier numériquement les prédictions de l'évaluation présentée ci-dessus. Pour ce cas proche du flottement [7], on peut donner une évaluation des paramètres  $k$  et  $d$ , négatifs tous les deux (avec  $|k|$  très petit).

On utilise dans un premier temps une méthode de type synchrone caractérisée par un fort sous-cyclage ( $\Delta t_S = 161\Delta t_F$ ), et les choix suivants pour les forces échangées:  $\mathbf{P}_F^{n+1} = \frac{1}{\Delta t_S} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt$  et  $\mathbf{P}_S^{n+1} = \frac{2}{\Delta t_S} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt - \mathbf{P}_S^n$ . On utilise une prédiction (30) avec  $\alpha_0 = 1$ , et l'on fait varier  $\alpha_1$ . Le paramètre  $\delta E$  pour ce type de méthode s'écrit alors en fonction de  $\alpha_1$

$$\delta E = d \left( \alpha_1 - \frac{1}{2} \right) h^2 + k \frac{3}{2} \left( \alpha_1 - \frac{2}{9} \right) h^3 + O(h^4). \quad (35)$$

On a représenté sur la Figure 2 la deuxième coordonnée modale pour le déplacement du panneau obtenu pour différentes valeurs de  $\alpha_1$  et pour une simulation de référence. Pour  $\alpha_1 = 1/2$ , on retrouve le résultat de référence obtenu avec un pas de temps très faible, ce qui était prédit par l'estimation (35), de même que la variation de l'amortissement numérique en fonction du paramètre  $\alpha_1$ .

Notre méthode d'évaluation prédit également le rôle déterminant du choix de pression "amélioré"  $\mathbf{P}_S^{n+1} = \frac{2}{\Delta t_S} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt - \mathbf{P}_S^n$ . Toutes choses égales par ailleurs, et avec  $\alpha_1 = 1/2$ , on a  $\delta E = k \frac{5}{12} h^3 + O(h^4)$ , alors que pour un choix de pression "standard"  $\mathbf{P}_S^{n+1} =$

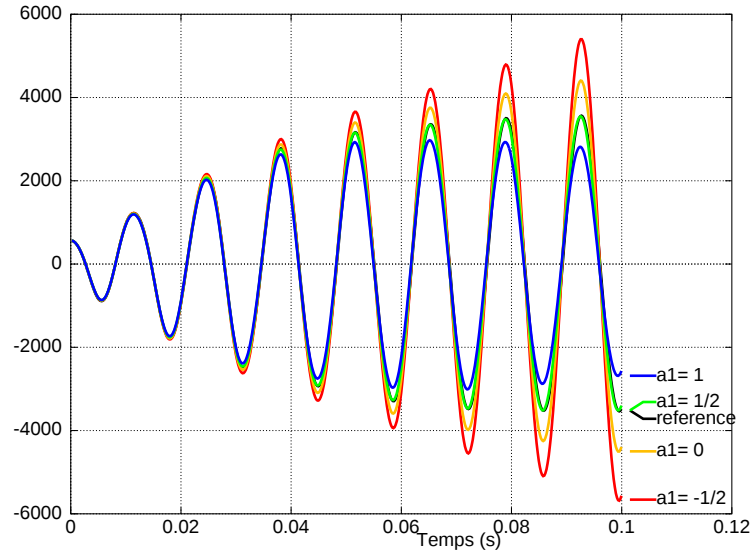


FIG. 2 – Deuxième coordonnée modale en fonction du temps, obtenue pour différents  $\alpha_1$ .

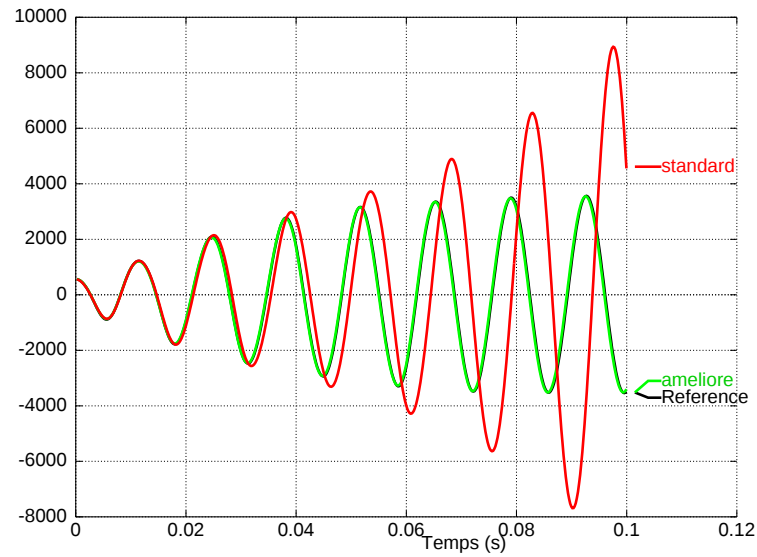


FIG. 3 – Effet du choix de  $\mathbf{P}_S^{n+1}$ .

$\frac{1}{\Delta t_S} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt$ , on a  $\delta E = -kh/2 + O(h^2)$ , qui est ici 150 fois plus grand. Ceci est clairement confirmé par les résultats numériques présentés en Figure 3.

Les conclusions de notre évaluation d’algorithmes de couplage sont également confirmées pour des écoulements tridimensionnels autour d’un panneau semblable au précédent ou d’une aile AGARD 445.6 [77, 39]. Les résultats sont de nature qualitative (amortissement positif ou négatif) mais aussi quantitative (on constate dans la plupart des cas des amortissements proportionnels à ceux prédits par notre évaluation) sur l’influence de nombreux paramètres entrant dans la définition d’un algorithme de couplage: par exemple, le choix d’algorithmes plus parallèles, l’importance du sous-cyclage et le pas de temps  $\Delta t_S$ . De manière générale, nous avons constaté qu’une méthode est d’autant plus stable et plus efficace à précision donnée qu’elle conserve mieux l’énergie, c’est-à-dire que le paramètre  $\delta E$  produit par notre évaluation est plus faible.

### Perspectives:

Ceci nous encourage évidemment à utiliser cette évaluation pour construire des algorithmes de couplage plus précis, stables et efficaces. La stabilité et la précision sont atteintes avec des algorithmes de couplage qui échangent au mieux l’énergie et la quantité de mouvement respectivement. Pour ce qui est de l’efficacité, nous espérons adapter la méthode d’évaluation présentée ici à d’autres familles d’algorithmes de couplage, notamment des algorithmes parallèles (les algorithmes décalés gardent un caractère séquentiel, puisque les sous-systèmes fluide et structure sont avancés successivement) ou des algorithmes fortement couplés avec résolution itérative. Pour ces derniers, il serait souhaitable de mieux comprendre l’influence sur la conservation de l’énergie du nombre de cycles de prédiction, du seuil de convergence pour les cycles et éventuellement de la relaxation.

## 2 Interactions fluide-structure: simulations numériques

### 2.1 Quelques résultats en aéroélasticité compressible

*Publication [4]*

On s'intéresse ici à des simulations numériques de couplages aéroélastiques entre une structure simple et un écoulement bidimensionnel non visqueux. On montre que les algorithmes de couplage les plus précis du point de vue de la conservation de l'énergie donnent des résultats de très bonne qualité de manière plus efficace.

#### Cas tests:

On considère deux problèmes physiques. Le premier est un profil d'aile (de forme NACA0012) en mouvement rigide dans un écoulement transsonique non visqueux. On se limite à deux degrés de liberté: le déplacement vertical  $h$  et la rotation  $\theta$  (voir Figure 4), dont les équations d'évolutions sont

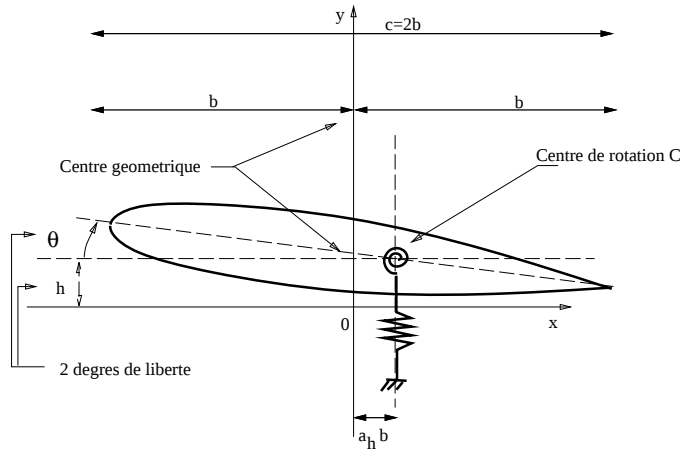


FIG. 4 – Le profil d'aile à deux degrés de liberté.

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_\theta\ddot{\theta} + c_h\dot{h} + k_h h &= F_h \\ S_\theta\ddot{h} + I_\theta\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + k_\theta\theta &= M_\theta \end{cases} \quad (36)$$

où  $F_h$  et  $M_\theta$  sont respectivement la portance et le moment (par rapport au centre de rotation  $C$  situé en  $x_C = a_h b$ ) des forces fluides sur le profil, donnés par

$$F_h = \int_{\Gamma} P \vec{n} \cdot \vec{j} \, ds, \quad M_\theta = \int_{\Gamma} P (C \vec{M} \times \vec{n})_z \, ds,$$

et  $P \vec{n}$  est la force de pression exercée par le fluide sur le profil  $\Gamma$ . Tous les autres coefficients sont définis en fonction de nombres sans dimension ( $b = c/2$ ,  $\omega_h = \lambda \omega_\theta$ ,  $k_h = m \omega_h^2$ ,  $c_h = 2\xi_h \omega_h m$ ,  $S_\theta = m b x_\theta$ ,  $I_\theta = m b^2 \gamma_\theta^2$ ,  $k_\theta = I_\theta \omega_\theta^2$ ,  $c_\theta = 2\xi_\theta \omega_\theta I_\theta$ ) donnés dans la Table 1 et représentent un modèle bidimensionnel d'une section d'aile en trois dimensions d'espace.

TAB. 1 – Paramètres d'adimensionnement et nombres sans dimension.

| $m$    | $c$   | $\omega_\theta$     | $a_h$ | $x_\theta$ | $\gamma_\theta$ | $\xi_h$ | $\xi_\theta$ | $\lambda$ |
|--------|-------|---------------------|-------|------------|-----------------|---------|--------------|-----------|
| 1.0 Kg | 1.0 m | 100 s <sup>-1</sup> | -1    | 1.8        | 1.865           | 0       | 0            | 1         |

Dans le second cas-test, on examine l'écoulement supersonique non visqueux au-dessus d'un panneau plat semi-infini, dont la face inférieure est soumise à une pression constante. Le panneau est représenté sur la Figure 5. Il a une longueur  $L = 0.5 \text{ m}$ , une épaisseur

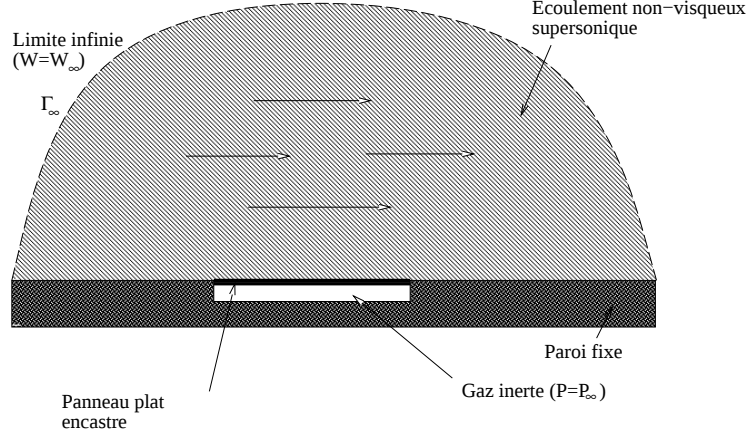


FIG. 5 – *Panneau plat semi-infini.*

uniforme  $h = 1.35 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Il est constitué d'aluminium ( $E = 7.728 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $\rho_S = 2710 \text{ Kg/m}^3$ ) et encasté aux deux extrémités. Le déplacement vertical du panneau  $X$  vérifie alors

$$\rho_S h \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = -P,$$

avec les conditions aux limites  $X(0) = X(L) = X_x(0) = X_x(L) = 0$ . Ce panneau est susceptible de flotter [7, 18]. Pour les données choisies, une instabilité apparaît pour un nombre de Mach à l'infini de  $M_\infty = 2.27$ , avec une pulsation  $\omega = 462 \text{ rad/s}$  (le mode de flottement est clairement asymétrique et n'est pas un mode propre du panneau). Ce test permet d'apprécier la précision des méthodes numériques, et notamment de l'algorithme de couplage, dans la détermination de la limite de stabilité. En effet, un algorithme de couplage créant (respectivement diffusant) artificiellement trop d'énergie surestimerait (respectivement sous-estimerait) la limite de stabilité.

Le vecteur des variables conservatives  $W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^t$ , où  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  et  $E$  sont respectivement la densité, les vitesses horizontales et verticales, et l'énergie volumique du fluide, est solution des équations d'Euler bidimensionnelles

$$\partial_t W + \partial_x \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (E + P)u \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (E + P)v \end{pmatrix} = 0,$$

où la pression  $P$  est donnée par la loi d'état des gaz parfaits

$$P = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right) \text{ avec } \gamma = 1.4.$$

Sur les parois solides dans les deux cas (aile, panneau et paroi fixe autour du panneau), on a une condition de glissement  $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{u}_s \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$ ,  $\vec{u} = {}^t(u, v)$  et  $\vec{u}_s$  sont respectivement

la normale au bord, la vitesse du fluide et la vitesse du bord). Sur la frontière infinie du domaine, le vecteur des variables conservatives  $Q$  est donné

- pour l’aile transsonique, par  $u_\infty = b\omega_\theta V^*$ ,  $\rho_\infty = m/(\pi\mu b^2)$ ,  $v_\infty = 0$  et  $E_\infty = (2/(\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2) + 1)\rho_\infty u_\infty^2/2$ , avec  $M_\infty = 0.8$ ,  $V^* = 5.477$  et  $\mu = 60$ , qui définissent un écoulement au-delà de la limite de flottement de l’aile,
- pour le panneau supersonique, par  $P_\infty = 25714 \text{ Pa}$ ,  $\rho_\infty = 0.4 \text{ Kg m}^{-3}$ ,  $v = 0$  et le nombre de Mach à l’infini  $M_\infty$ .

### Méthodes numériques:

Pour la résolution des équations d’Euler en domaine déformable, on a choisi de reprendre une méthode proposée par Batina [4] où la triangulation non-structurée de départ se déforme à topologie constante. Une fois les déplacements des points du bord du domaine fluide connus, on propage ces déplacements à l’intérieur du maillage fluide en utilisant une analogie élastique: on attribue à chaque arête  $ij$  (entre deux sommets  $i$  et  $j$ ) un ressort virtuel de raideur inversement proportionnelle à sa longueur; puis on recherche l’équilibre statique des sommets internes du maillage

$$\sum_{j \in N(i)} k_{ij}(\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i) = 0, \text{ pour } i \text{ sommet interne}, \quad (37)$$

où  $N(i)$  est l’ensemble des sommets voisins du sommet  $i$ . Cette équation est résolue par une méthode itérative de type Jacobi.

Cette méthode fournit pour chaque pas de temps un champ de vitesse de maillage, qui intervient dans la formulation ALE (1) (transposée en seulement deux dimensions d’espace) et dans sa formulation conservative en volumes finis (2). Les volumes finis considérés ici sont les cellules duales représentées sur la Figure 6. Le schéma en espace a une forme assez

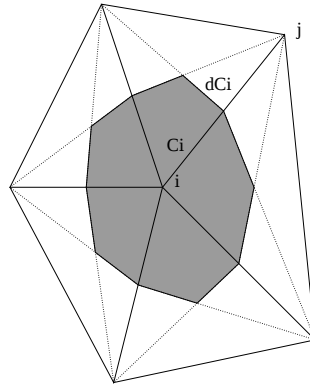


FIG. 6 – Cellule  $C_i$  de bord  $\partial C_i$  autour du sommet  $i$

classique, où interviennent des flux numériques fondés sur un solveur de Riemann approché de type Roe en maillage mobile. Une extension de type MUSCL [70] adaptée aux maillages non-structurés [22] ne pose pas de problème particulier. Pour ces flux, de nombreux choix sont possibles sur certains éléments géométriques variables dans le temps, notamment la normale et la vitesse de l’interface entre deux volumes finis. N’Konga et Guillard [50] ont proposé un schéma à partir d’une formulation en espace et en temps, tandis que Farhat et al [18] ont obtenu le même schéma en se limitant à des formulations où le volume est exactement conservé lorsque les vitesses des sommets du maillages sont en fait des vitesses moyennes par pas de temps. Le schéma en temps utilisé est un schéma explicite de type Runge-Kutta à trois pas avec faible stockage, d’ordre deux.

Pour les deux cas tests, les équations d'évolution de la structure linéaire peuvent être écrite en fonction du champ de déplacement  $X$  sous la forme d'une équation du second ordre (3), où  $M$ ,  $D$  et  $K$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et rigidité. On utilise encore la règle du trapèze (4).

### Résultats numériques:

On cherche ici à vérifier sur des expériences numériques l'importance de certains choix dans les algorithmes présentés dans la section précédente (page 23). Pour le cas de l'aile transsonique, hautement sous-cyclé, le choix de la pression  $\mathbf{P}_S^{n+1}$  transmise à la structure par le fluide est fondamental. On a représenté sur la Figure 7 la rotation de l'aile  $\theta$  (en

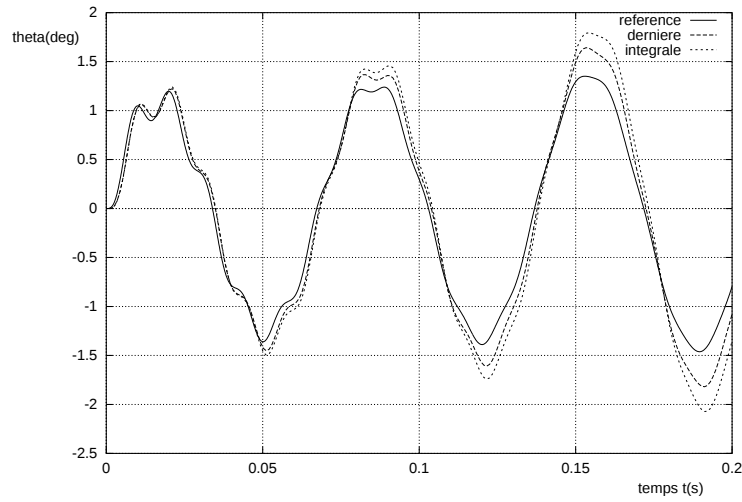


FIG. 7 – Rotation de l'aile pour différentes pressions transmises.

degrés) pour une simulation de référence et deux autres simulations avec l'algorithme de la page 23 (avec  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  dans (30)) pour la dernière pression disponible  $\mathbf{P}_S^{n+1} = F^{n+1}$  et l'intégrale en temps

$$\mathbf{P}_S^{n+1} = \frac{1}{\Delta t_S} \sum_{k=1}^{n_{F/S}} \Delta t_{F_k} F_k^n,$$

où la sommation est étendue sur tous les sous-cycles (ici  $\Delta t_S = 8.76 \cdot 10^{-4} s$  et le nombre de sous-cycles et  $\mathbf{n} = 60$ ). Le choix de la force utilisée est déterminant, comme le prévoit la méthode d'évaluation vue précédemment en section 1.4. Il en va de même pour la prédiction structurelle utilisée : on a représenté sur la Figure 8 la rotation de l'aile pour une simulation de référence et deux autres simulations avec l'algorithme de la page 23 (pour la dernière pression disponible  $\mathbf{P}_S^{n+1} = F^{n+1}$ ) avec la prédiction d'ordre zéro ( $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ ) et la prédiction d'ordre un définie par  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = 0$ . On a encore  $\Delta t_S = 8.76 \cdot 10^{-4} s$  et  $\mathbf{n} = 60$ .

Le cas test du flottement du panneau sous un écoulement supersonique permet d'apprécier assez finement la qualité de l'algorithme de couplage utilisé. Une simulation de référence (avec un pas de temps très petit  $\Delta t_S = 1.23 \cdot 10^{-6} s$ ) prédit pour les discrétisations choisies une limite de stabilité proche de  $M_\infty = 2.23$ , ce qui est en bon accord avec la

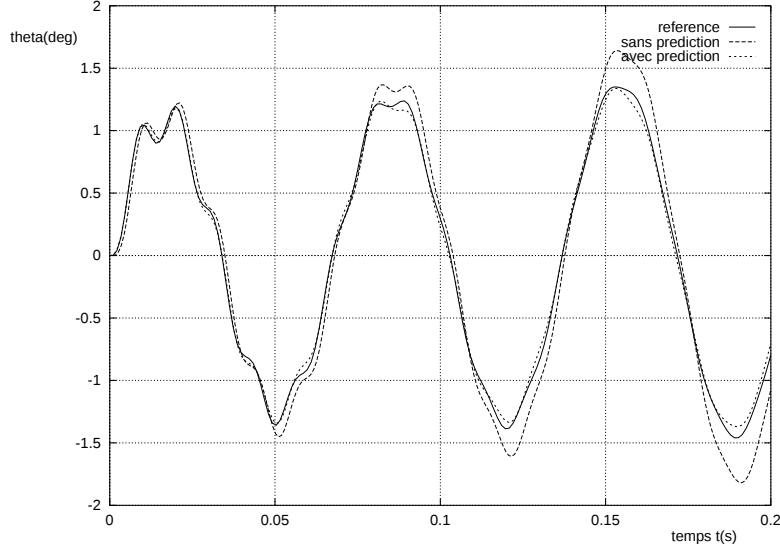


FIG. 8 – *Rotation de l'aile avec ou sans prédiction pour la structure.*

valeur théorique de  $M_\infty = 2.27$ . D'ailleurs, la pulsation de flottement trouvée numériquement ( $\omega = 452 \text{ rad/s}$ ) est aussi à moins de 2% de la valeur théorique ( $\omega = 462 \text{ rad/s}$ ). On espère retrouver ces bons résultats avec un algorithme de couplage performant. On utilise dans la suite une méthode de type synchrone (voir page 23) avec une prédiction d'ordre deux ( $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1 = 1/2$ ), et l'utilisation par la structure de pressions intégrées en temps et corrigées pour la règle du trapèze  $\mathbf{P}_S^{n+1} = 2/\Delta t_S \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t)dt - \mathbf{P}_S^n$ .

Pour un nombre de Mach à l'infini de  $M_\infty = 2.24$  (voir Figure 9), le mouvement

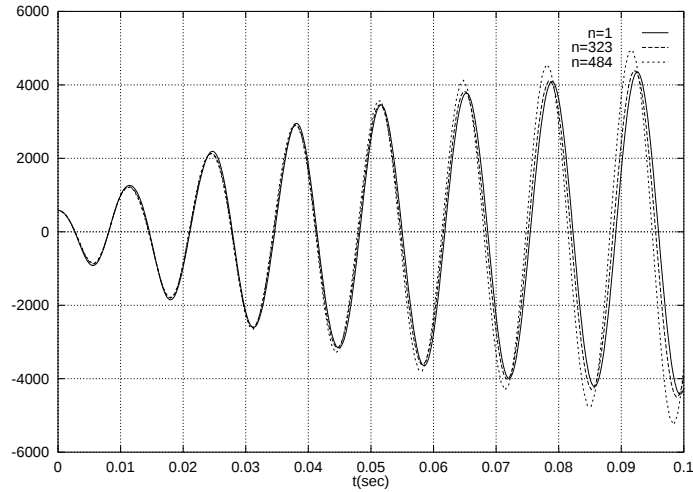


FIG. 9 – *2<sup>ème</sup> coordonnée modale du déplacement pour  $\mathbf{n} = 1, 322$  et  $483$  ( $M_\infty = 2.24$ ).*

du panneau est très légèrement amplifié. On note d'ailleurs que le résultat obtenu pour  $\Delta t_S = 0.4 \text{ ms}$  et  $\mathbf{n} = 322$  coïncide avec le résultat de référence. Ce n'est pas le cas lorsque  $\Delta t_S$  est trop grand: ici,  $\mathbf{n} = 483$  correspond à 23 pas de temps par période couplée d'oscillation, ce qui est effectivement assez faible. Les résultats de simulations numériques similaires, mais avec  $M_\infty = 2.23$ , sont reproduits sur la Figure 10. On note encore que le résultat obtenu pour  $\Delta t_S = 0.4 \text{ ms}$  et  $\mathbf{n} = 323$  coïncide avec le résultat de référence

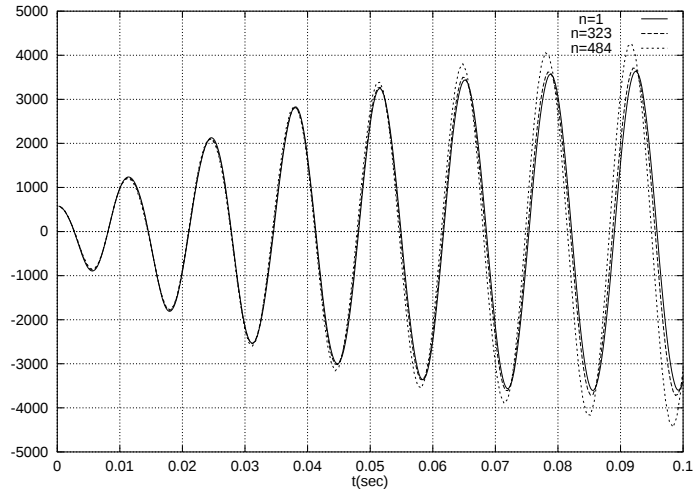


FIG. 10 – 2<sup>ème</sup> coordonnée modale du déplacement pour  $n = 1, 323$  et  $484$  ( $M_\infty = 2.23$ ).

et que l'algorithme retenu semble donc précis dans une limite d'une trentaine de pas de temps par période d'oscillation, indépendamment du nombre de sous-cycles. Dans ce cas, le mouvement du panneau est très légèrement amorti. On a donc pu montrer numériquement que la limite de stabilité pour le panneau est comprise entre  $M_\infty = 2.23$  et  $M_\infty = 2.24$ . Ce résultat est obtenu pour un algorithme performant avec un fort sous-cyclage. L'écart avec la valeur théorique  $M_\infty = 2.27$  n'est probablement pas dû à l'algorithme de couplage mais aux discrétisations spatiales utilisées, puisque les calculs de références donnent le même encadrement pour la limite de stabilité.

## 2.2 Quelques résultats en aéroélasticité incompressible

*Publication [6]*

### Problèmes modèles et méthodes numériques:

Les instabilités aéroélastiques d'ouvrages d'art du Génie Civil, en particulier les ponts suspendus et les constructions élancées, ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales [74] et sont désormais à la portée de la simulation numérique [51]. On cherche ici à obtenir des résultats préliminaires dans ce domaine, pour pouvoir par la suite envisager des calculs beaucoup plus complexes d'écoulements autour de structures réelles, produisant des résultats si possible aussi fiables et exploitables que les essais en soufflerie expérimentale.

Comme précédemment, les principales composantes à réunir pour pouvoir effectuer ce type de simulation sont un code de résolution des équations fluides en domaine déformable, fondé sur une formulation ALE, et un algorithme de couplage. On reprend ici l'algorithme présenté dans la section 1.4. Néanmoins, comme il s'agit de calculs préliminaires sur des profils de ponts simples, on ne recherchera pas une efficacité maximale, et l'algorithme de couplage sera utilisé bien en-deçà de sa limite de stabilité.

On s'intéresse ici à des phénomènes aéroélastiques mettant en jeu une section de tablier de pont en mouvement rigide dans un vent constant. Le fluide visqueux incompressible est régi par les équations de Navier-Stokes (incompressible) dans un domaine déformable autour du profil:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

où  $\vec{\mathbf{u}}$  est la vitesse du fluide,  $p$  sa pression réduite et  $\nu$  sa viscosité cinématique. On impose des conditions de Dirichlet partout aux bords du domaine (vent imposé à l'infini et adhérence à l'interface fluide-structure  $\vec{\mathbf{u}}(t, \vec{x}) = \vec{\mathbf{u}}_s(t, \vec{x})$ ).

Les équations du fluide en domaine déformable sont résolues sur maillage mobile. On est parti d'un code [53] purement Eulérien en éléments finis mixtes P1-bulle/P1 [3], où le terme non-linéaire (de dérivée particulaire) des équations de Navier-Stokes est traité, dans la formulation variationnelle du problème, par la méthode des caractéristiques. Celles-ci sont remontées par un schéma d'ordre un dans un maillage tridimensionnel non-structuré en tétraèdres, à partir de points de Gauss dans chaque tétraèdre. On utilise alors le schéma implicite du premier ordre suivant:

$$\begin{cases} k [\vec{\mathbf{u}}^{n+1}(x) - \vec{\mathbf{u}}^n(\chi(t^n; \vec{\mathbf{u}}^n; t^{n+1}, x))] - \nu \Delta \vec{\mathbf{u}}^{n+1}(x) + \nabla p^{n+1}(x) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

où  $1/k = \Delta t$  est le pas de temps et  $\chi(t^n; \vec{\mathbf{u}}^n; t^{n+1}, x)$  est la position à l'instant  $t^n = t^{n+1} - \Delta t$  de la caractéristique pour le champ  $\vec{\mathbf{u}}^n$  qui passe par  $(x, t^{n+1})$ . Le seul terme dépendant de  $\vec{\mathbf{u}}^n$  dans (38) est un second membre pour un problème de Stokes généralisé sur les champs  $\vec{\mathbf{u}}^{n+1}$  et  $p^{n+1}$ . Celui-ci est résolu par une méthode d'Uzawa [57] avec gradient conjugué préconditionné.

Le passage à un solveur ALE est assez simple. Comme en volumes finis, on propage les mouvements de l'interface fluide-structure à l'ensemble du maillage par la méthode des ressorts (37). On obtient alors un champ de vitesse des sommets  $\vec{\mathbf{v}}^{n+1/2}$  pour le pas de temps à venir. Ensuite, l'équation (38) est réécrite en coordonnées mixtes  $\xi$  en

$$\begin{cases} k [\vec{\mathbf{u}}^{n+1}(\xi) - \vec{\mathbf{u}}^n(\chi(t^n; \vec{\mathbf{u}}^n - \vec{\mathbf{v}}^n; t^{n+1}, \xi))] - \nu \Delta \vec{\mathbf{u}}^{n+1}(\xi) + \nabla p^{n+1}(\xi) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Les caractéristiques sont remontées avec le champ  $\vec{\mathbf{u}}^n - \vec{\mathbf{v}}^{n+1/2}$ , ce qui donne un schéma consistant puisque le maillage lui-même se déplace avec la vitesse  $\vec{\mathbf{v}}^{n+1/2}$ . L'algorithme est le suivant:

- F1-** Calcul du champ  $\vec{\mathbf{v}}^{n+1/2}$ , mise à jour du maillage
- F2-** Mise à jour des matrices éléments finis,
- F3-** Calcul du second membre dérivant de  $\vec{\mathbf{u}}^n(\chi(t^n; \vec{\mathbf{u}}^n - \vec{\mathbf{v}}^n; t^{n+1}, \xi))$ ,
- F4-** Résolution du problème de Stokes généralisé dans le nouveau maillage.

Pour l'ensemble des simulations numériques, on a choisi de prendre un nombre de Ryenolds  $Re = 20000$  (proche du Reynolds en soufflerie) et de ne pas utiliser de modèle de turbulence (leur validité restant à démontrer lorsque le maillage est mobile). Ces choix pourraient détériorer la qualité des résultats numériques, tout aussi bien que l'utilisation d'un maillage qui n'est pas extrêmement raffiné.

Pour la structure, on considère encore un modèle à deux degrés de liberté (36) sans couplage ( $S_\theta = 0$ ) ni amortissement ( $c_h = c_\theta = 0$ ). La portance  $F_h$  et le moment  $M_\theta$  des forces fluides sont donnés par

$$F_h = D \int_{\Gamma} \vec{F}_{\mathbf{F}} \cdot \vec{e}_y ds, \quad M_\theta = D \vec{e}_z \cdot \int_{\Gamma} \vec{r} \times \vec{F}_{\mathbf{F}} ds, \quad \vec{F}_{\mathbf{F}} = \rho_F [\nu (\nabla \vec{\mathbf{u}} + \nabla \vec{\mathbf{u}}^T) - pI] \vec{n}. \quad (40)$$

où  $D$  est la profondeur de la section et  $\vec{F}_{\mathbf{F}}$  la force ponctuelle exercée par le fluide visqueux sur l'interface fluide-structure, de normale  $\vec{n}$  et de position  $\vec{r}$ . La structure est encore avancée en temps avec la règle du trapèze.

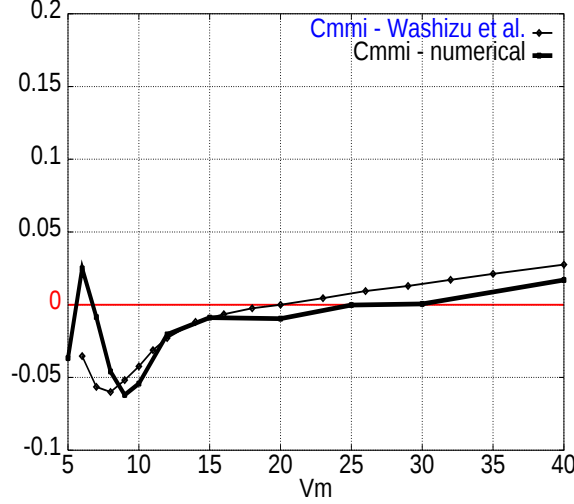


FIG. 11 –  $C_{MmI}$  pour  $\theta_m = 1.91$  deg: résultats numériques et expérimentaux.

Enfin, le couplage est traité par l'algorithme de la page 23, avec une prédiction d'ordre deux ( $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1/2$ ), et l'utilisation par la structure de forces corrigées  $F^{n+1} = 2F_{\mathbf{F}}^{n+1} - F^n$ , où les forces  $F_{\mathbf{F}}^{n+1} = (F_h^{n+1}, M_\theta^{n+1})$  dans (40) sont calculées à l'instant  $t^{n+1}$ . Cet algorithme, précis et efficace, est utilisé ici bien en deçà de sa limite de stabilité et précision, puisque notre objectif premier est, nous le rappelons, la validation du nouvel outil de simulation.

### Résultats numériques:

On cherche d'abord à reproduire des résultats expérimentaux [74, 75] d'oscillations forcées (en translation verticale et en rotation) d'un profil rectangulaire (d'aspect – rapport largeur sur épaisseur – égal à 4). Les oscillations forcées sont sinusoïdales, de pulsation  $\omega_m$  et d'amplitude ( $y_m$  en translation verticale,  $\theta_m$  en rotation) fixées par l'expérimentateur. Un paramètre fondamental est la vitesse réduite du vent  $v_m = u_\infty T_m / d$ , où  $u_\infty$  est la vitesse du fluide à l'infini,  $T_m = 2\pi / \omega_m$  et  $d = 1m$  est l'épaisseur du profil. On analyse fréquemment la réponse de fluide (portance ou moment), et on calcule *in fine* s'il fournit de l'énergie à la structure ou absorbe de l'énergie. Ce transfert d'énergie est alors mesuré par des coefficients adimensionnés de portance  $C_{LmI}$  ou de moment  $C_{MmI}$ , qui représentent de l'amortissement: si  $C_{LmI}/MmI$  est négatif, le fluide amortit les mouvements de la structure; si  $C_{LmI}/MmI$  est positif, le fluide a tendance à amplifier les mouvements de la structure et le profil est alors dit instable.

Pour des oscillations forcées en rotation, on compare sur la Figure 11 les courbes obtenues expérimentalement [75] et numériquement pour le coefficient  $C_{MmI}$  en fonction de la vitesse réduite  $v_m$  pour  $\theta_m = 1.91$  deg. Les deux courbes sont en accord très satisfaisant: on retrouve un creux (légèrement décalé) dans les basses vitesses et une déstabilisation progressive au-delà de  $v_m = 12$ . La détermination de la limite de stabilité reste cependant un peu imprécise à partir des résultats numériques.

Pour des oscillations forcées en translation verticale, on compare sur la Figure 12 les courbes obtenues expérimentalement [74] et numériquement pour le coefficient  $C_{LmI}$  en fonction de la vitesse réduite  $v_m$  pour deux amplitudes différentes ( $y_m = 2cm$  et  $y_m = 10cm$ ). Les résultats numériques semblent décalés et très peu précis (on reconnaît cependant une allure générale). On retrouve aussi que le profil est stable pour toutes les vitesses réduites lorsque l'amplitude d'oscillation forcée est grande ( $y_m = 10cm$ ) et qu'il existe un intervalle d'instabilité pour une amplitude plus faible ( $y_m = 2cm$ ): expérimentalement

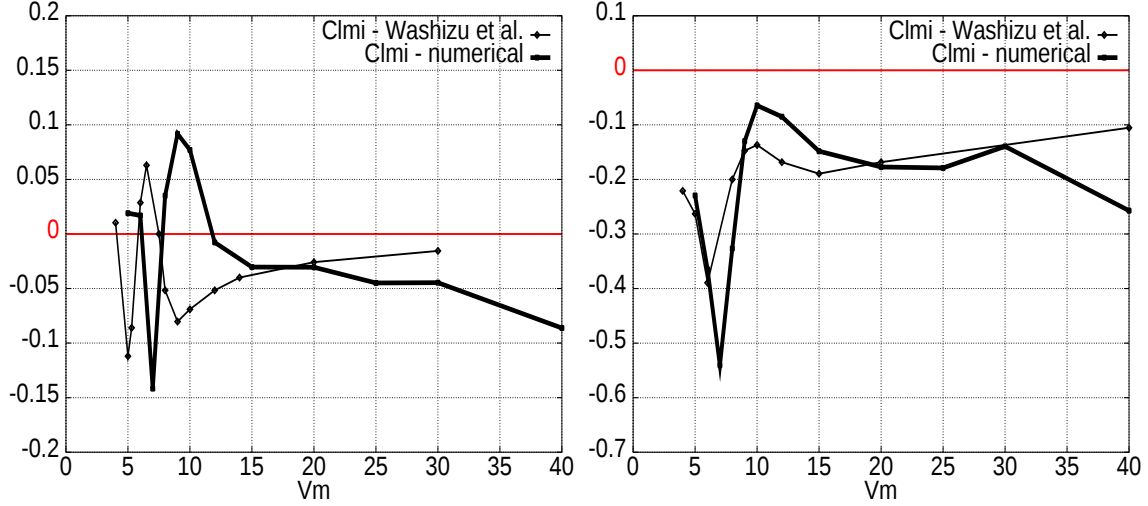


FIG. 12 –  $C_{LmI}$  pour  $y_m = 2cm$  et  $y_m = 10cm$ : résultats numériques et expérimentaux.

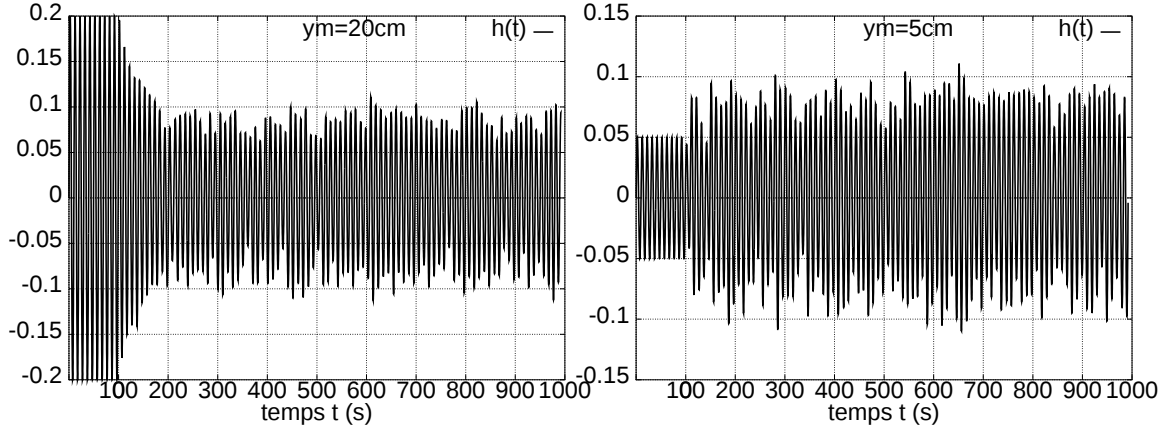


FIG. 13 –  $y(t)$  pour des oscillations libres avec  $u_\infty T_s/d = 10$ .

$v_m \in [6 : 7.5]$  et numériquement  $v_m \in [7.5 : 12]$ . Ce résultat laisse aussi présager que, pour des oscillations libres dans l'intervalle  $u_\infty T_s/d \in [7.5 : 12]$  (où  $T_s$  est la période propre de la structure), on devrait obtenir des cycles limites d'amplitude comprise entre deux et dix centimètres.

Ceci est confirmé par des calculs en oscillations libres (translation verticale uniquement). On prend un modèle de structure ( $m = 100kg$ ,  $k_h = m\omega_s^2$  dans (36)) dont la période propre est telle que  $u_\infty T_s/d = 10$ . On force des oscillations verticales d'amplitude fixée pendant quelques périodes, puis on laisse évoluer le système fluide-structure (voir Figure 13). Pour l'amplitude initiale  $y_m = 20cm$ , les amplitudes sont d'abord amorties, tandis que pour  $y_m = 5cm$ , les déplacements sont d'abord amplifiés, ce qui est conforme aux résultats des oscillations forcées. Dans les deux cas, on tend vers des cycles limites plutôt apériodiques d'amplitudes comparables. Pour un ouvrage d'art, ces cycles limites d'amplitude non négligeables pourraient être à l'origine d'une fatigue accélérée.

Nous terminons par des simulations d'une section du pont de Tacoma, section en I très étudiée depuis la ruine de l'ouvrage [59]. Nous utilisons une géométrie simplifiée (voir

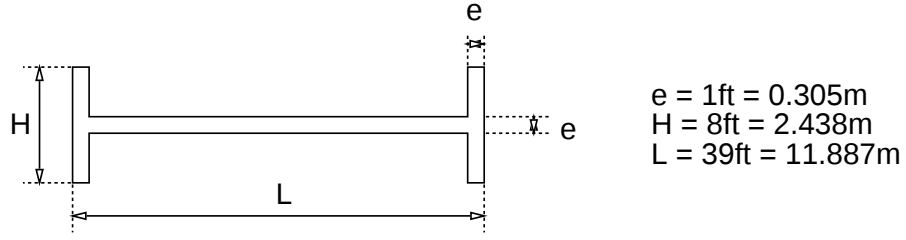


FIG. 14 – *Géométrie simplifiée d'une section du pont de Tacoma.*

Figure 14), et un modèle structuel (36) à deux degrés de liberté [67]. On examine le comportement de cette section dans un écoulement permanent d'air atmosphérique ( $\rho_\infty = 1.293 \text{ Kg/m}^3$  et  $\nu = 1.496 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Pour des vitesses  $V$  de vent dans l'intervalle  $[20\text{m/s}; 40\text{m/s}]$ , on laisse évoluer librement le système assez longtemps et l'on représente l'énergie totale de la structure  $e = (m\dot{h}^2 + k_h h^2 + I_\theta \dot{\theta}^2 + k_\theta \theta^2)/2$  en fonction du temps sur la Figure 15. Conformément à ce qui est reporté expérimentalement [59], une première instabilité (en translation verticale) apparaît pour  $V \in [23.18\text{m/s}; 25\text{m/s}]$ . Une deuxième instabilité en rotation apparaît ensuite ( $V \geq 32.5$ ), celle à l'origine de la ruine de l'ouvrage.

### Perspectives:

Malgré l'absence de modèles de turbulence et malgré l'emploi de schémas du premier ordre en temps (Euler implicite, caractéristiques d'ordre un), on a pu reproduire certaines caractéristiques aéroélastiques d'ouvrages peu profilés (cylindre rectangle et section de type Tacoma). Plusieurs perspectives s'ouvrent à la suite de ces simulations préliminaires: l'examen de la validité de modèles de turbulence en maillage mobile, la mise au point et l'implémentation de schémas d'ordre deux en temps pour le fluide (caractéristiques d'ordre deux), l'utilisation optimale d'algorithmes de couplages. A terme, la prochaine validation recherchée passe par l'obtention de résultats similaires à ceux présentés ici pour des profils de ponts réels - plus effilés - et pour des écoulements autour ou à l'intérieur d'objets en trois dimensions d'espace (sphères, éléments de ponts, etc...) avec de possibles grands déplacements structurels (écoulements sanguins, etc...).

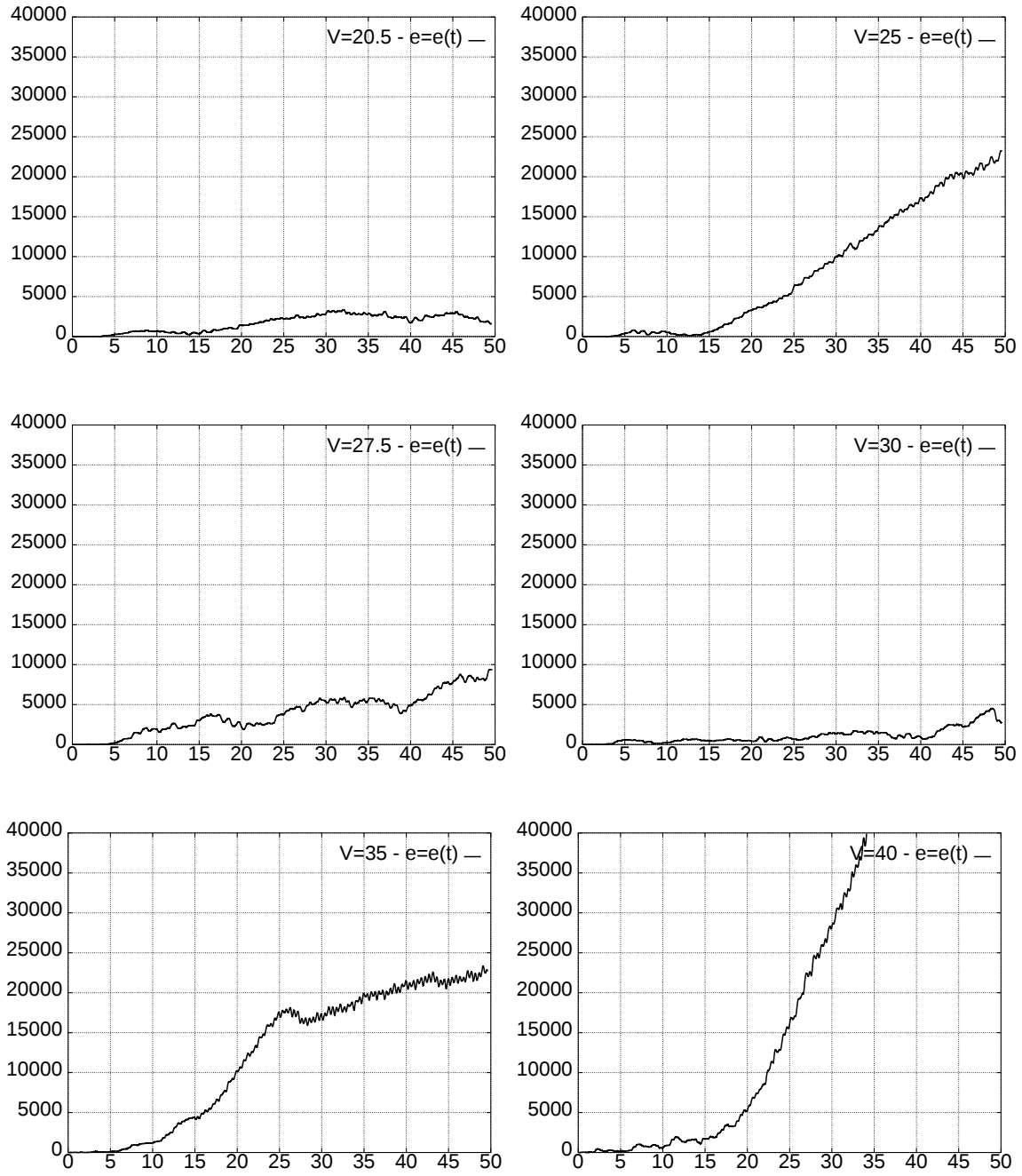


FIG. 15 – Énergie de la structure pour différentes vitesses de vent.

### 3 Volumes finis: précision, stabilité et estimations d'énergie

#### 3.1 Précision et efficacité de schémas volumes finis

*Publications [5] [3]*

La méthode des volumes finis est la méthode qui répond le mieux aux caractéristiques particulières des problèmes hyperboliques, à savoir que tout problème de Cauchy peut être amené à comporter des singularités.

Ainsi, si l'on prend l'exemple de la simulation d'un flottement aérodynamique (écoulement compressible), le schéma en volumes finis doit être raisonnablement précis en temps pour pouvoir capter certains aspects purement instationnaires de l'écoulement, et en espace pour ne pas masquer les phénomènes derrière trop de diffusion ou dispersion numérique.

Pour la simulation d'interactions fluide-structure, au moins telle que nous l'avons envisagée jusqu'à maintenant, une troisième contrainte vient s'ajouter à cette double problématique: le maillage évolue à topologie constante, il sera donc nécessairement plutôt grossier, en certains points de l'écoulement et à certains instants.

Pour ne pas aborder cette triple demande directement, nous avons choisi de nous intéresser au cas du maillage fixe, cas somme toute assez classique en analyse numérique. Parallèlement et à la même époque, nous avons cherché à évaluer des méthodes probabilistes (et sans maillage) pour la mécanique des fluides, appelées méthodes de "vortex" pour les équations de Navier-Stokes incompressible [28], notamment en une dimension d'espace (sur l'équation de Burgers). Pour faire cette comparaison, nous avons donc naturellement cherché les méthodes les plus efficaces en termes de précision à temps de calcul donné. Notre contribution sur la question a concerné des schémas en volumes finis avec limiteurs, précis, à variation totale décroissante et efficaces.

#### Monotonie et haute précision: (*Publication [5]*)

Des méthodes numériques efficaces se doivent d'être précises et dépourvues d'oscillations près des discontinuités. A partir de la méthode de Godunov, on sait, par exemple sur l'équation d'advection, atteindre l'ordre deux ou trois par la méthode MUSCL [70]. Mais de toute façon, un schéma linéaire monotone est au plus d'ordre un [31] et les schémas d'ordre plus élevé produisent des oscillations parasites. C'est pourquoi plusieurs concepts de monotonie sont apparus – généralisables plus ou moins facilement au-delà de la dimension un – pour sélectionner les schémas non-linéaires sans oscillations: les schémas à variation totale décroissante (TVD) [29], les schémas à extrema décroissants (LED) [35], etc... Les fameux limiteurs ont alors été introduits pour limiter les termes anti-diffusifs des schémas d'ordre élevé [65]. Dans le même esprit que pour la méthode MUSCL, les limiteurs que nous nous sommes proposé d'examiner en détail sont des limiteurs d'interpolation (et non pas de limiteurs de flux). On passe continûment de l'ordre un aux ordres supérieurs en changeant les arguments de fonctions de flux numériques de la méthode de volumes finis. La méthode est dite conservative si elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad (41)$$

où  $u_i$  est une approximation de la moyenne de  $u$  sur la cellule  $\mathcal{C}_i$  et  $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(\dots, u_i, u_{i+1}, \dots)$  est le flux numérique entre les cellules  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Dans (41), la dérivation en temps n'est pas précisée et pourra être traitée séparément. Des schémas monotones du premier ordre sont obtenus à partir de la méthode de Godunov: si  $\phi_{upwind}(u_L, u_R)$  est un flux exact ou

approché pour le problème de Riemann entre  $u_L$  et  $u_R$ , alors on peut prendre pour  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  dans (41)

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{upwind}(u_i, u_{i+1}).$$

Une meilleure précision peut être obtenue en prenant

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{upwind}\left(u_{i+\frac{1}{2}-}, u_{i+\frac{1}{2}+}\right), \quad (42)$$

avec

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}-} &= u_i + \frac{1}{2} \left[ (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta\Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ u_{i+\frac{1}{2}+} &= u_{i+1} - \frac{1}{2} \left[ (1-\beta)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta\Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right] \end{cases} \quad (43)$$

où  $\beta$  est un paramètre de décentrage (on obtient un schéma d'ordre deux en espace, et même d'ordre trois pour l'advection si  $\beta = 1/3$ ). Cette extension linéaire ne peut être TVD. Communément, on choisit alors de remplacer la formule d'interpolation (43) par

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2}-}^{lim} &= u_i + \frac{1}{2}\psi(R_i)\Delta u_{i-\frac{1}{2}} \\ u_{i+\frac{1}{2}+}^{lim} &= u_{i+1} - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{R_{i+1}}\right)\Delta u_{i+\frac{3}{2}} \end{cases} \quad (44)$$

Les coefficients  $R_i \equiv \Delta u_{i+\frac{1}{2}}/\Delta u_{i-\frac{1}{2}}$  mesurent les variations du gradient de  $u$ , et  $\psi$  est la fonction de limitation que nous cherchons à améliorer. Pour mémoire,  $\psi \equiv 0$  redonne le schéma décentré d'ordre un et  $\psi(R) \equiv \beta + (1-\beta)R$  le  $\beta$ -schéma MUSCL (43). On a les deux résultats suivants:

**Théorème 7 (Advection linéaire)** *Si  $\psi$  est de classe  $C^2$  au voisinage de  $R = 1$  et si  $\psi(1+h) = 1 + \frac{2}{3}h + O(h^2)$  quand  $h \rightarrow 0$ , alors le schéma (41-42-44) est précis à l'ordre trois en espace (où  $u$  est assez régulière et  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ ).*

**Théorème 8 (Advection linéaire)** *S'il existe une constante positive  $M$  telle que*

$$-2 \leq \psi(R) - \frac{\psi(S)}{S} \leq -2 + M, \quad \forall R, \forall S, \quad (45)$$

*alors le schéma en temps Euler explicite et le schéma en espace (41-42-44) forment un schéma TVD si le nombre de Courant  $\nu = |c|\Delta t/\Delta x$  est tel que  $\nu M \leq 2$ .*

Nous proposons alors les cinq critères suivants pour obtenir un limiteur aussi précis et efficace que possible (précision, stabilité du schéma Euler explicite, convergence vers une solution stationnaire):

1. La constante  $M$  du Théorème 8 pour le limiteur choisi  $\psi$  doit être aussi petite que possible. Ainsi, pour les applications instationnaires, le schéma Euler explicite sera TVD pour un nombre de Courant  $\nu \leq 2/M$  plus grand (et dans la pratique, ce sera le cas pour des schémas explicites d'ordre élevé comme les schémas de Runge-Kutta).
2. La fonction  $\psi$  doit être aussi régulière que possible (pour faciliter notamment la convergence vers une solution stationnaire).
3. Définissons la fonction  $\beta(R) = (\psi(R) - R)/(1 - R)$ . Le schéma (44) prend alors l'allure d'un  $\beta$ -schéma avec  $\beta$  variable. La précision du schéma se rapproche de l'ordre 3 lorsque l'entier  $p \geq 1$  croît dans le développement:  $\beta(1+h) = 1/3 + O(h^p)$  quand  $h \rightarrow 0$ . On recherchera donc un entier  $p$  aussi grand que possible.

| Limiteur $\psi$                              | Van Leer                    | Van Albada                  | Spekreijse                   | Koren         | $\psi_\star$           |
|----------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|---------------|------------------------|
| Borne $M$ dans (45)                          | 4                           | 3.41                        | 3.86                         | 4             | 3.31                   |
| Régularité sur $]0; +\infty[$                | $C^\infty$                  | $C^\infty$                  | $C^\infty$                   | $C^0$         | $C^2$                  |
| $h \rightarrow 0, \beta(1+h) =$              | $\frac{1}{2} + \frac{h}{4}$ | $\frac{1}{2} + \frac{h}{2}$ | $\frac{1}{3} + \frac{5h}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} + O(h^2)$ |
| $R \rightarrow 0^+, \psi(R)/R \rightarrow$   | 2                           | 1                           | $\frac{1}{2}$                | 2             | 1                      |
| $R \rightarrow +\infty, \psi(R) \rightarrow$ | 2                           | 1                           | 1                            | 2             | 1                      |

TAB. 2 – *Comparaison des cinq critères pour quelques limiteurs.*

4. On doit avoir  $\psi(R)/R \rightarrow 1$  quand  $R \rightarrow 0^+$ . Motivation: pour l'advection d'une vague carrée avec un  $\beta$ -schéma (43) sans limitation, des oscillations parasites apparaissent immédiatement aux points où  $R$  est proche de zéro, sauf pour  $\beta = 0$  (qui correspond à  $\psi(R) = R$ ).

5. On doit avoir  $\psi(R) \rightarrow 1$  quand  $R \rightarrow +\infty$ . Motivation: pour l'advection d'une vague carrée avec un  $\beta$ -schéma (43) sans limitation, des oscillations parasites apparaissent immédiatement aux points où  $R$  prend une grande valeur, sauf pour  $\beta = 1$  (qui correspond à  $\psi(R) = 1$ ).

Aucun des limiteurs classiques ne vérifie tous ces critères: les limiteurs de Van Leer [69] ( $\psi = (|R| + R)/(|R| + 1)$ ) et de Van Albada [68] ( $\psi = (R^2 + R)/(R^2 + 1)$ ) ne sont pas d'ordre trois. Le limiteur proposé par Spekreijse [63] n'est pas tangent à " $\beta = 1/3$ " quand  $R \rightarrow 1$ . Enfin, le limiteur proposé par Koren [37] n'est pas très régulier et n'a pas les comportements attendus en  $R \rightarrow 0^+$  et  $R \rightarrow \infty$ . La Table 2 résume comment les critères sont vérifiés par les limiteurs classiques et par le nouveau limiteur  $\psi_\star$  que nous proposons. Celui-ci s'écrit

$$\psi_\star(R) = \frac{1+2R}{3} \varphi_\star\left(\frac{1}{R}\right), \text{ avec } \varphi_\star(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ 1 + \left(\frac{3}{2}r + 1\right)(r-1)^3 & \text{si } 0 \leq r \leq 1, \\ \frac{3r^2 - 6r + 19}{r^3 - 3r + 18} & \text{si } 1 \leq r. \end{cases} \quad (46)$$

Les résultats numériques et les chronométrages montrent que le nouveau limiteur est le plus efficace, c'est-à-dire qu'il donne la plus petite erreur au bout d'un temps de simulation donné, pour un temps de calcul fixé. Cette conclusion nous assurera, dans la comparaison entre méthode déterministe et probabiliste, que la méthode déterministe choisie est parmi les plus efficaces.

En deux dimensions d'espace, l'extension MUSCL pour augmenter la précision peut se faire de deux manières, suivant qu'on utilise des gradients moyennés par cellule ou des gradients amont [22]. Comme en une dimension d'espace, les arguments de la fonction de flux numérique sont remplacés par des interpolations d'ordre plus élevé. Si  $W_i$  et  $W_j$  sont les approximations volumes finis de  $W$  dans deux cellules voisines  $C_i$  et  $C_j$ , on calcule deux états dits interpolés  $W_{ij}$  et  $W_{ji}$ , dont le premier est donné par

$$W_{ij} = W_i + \frac{1}{2} \Delta W_{ij}^\beta, \text{ avec } \Delta W_{ij}^\beta = (1 - \beta) \Delta W_{ij}^{cent} + \beta \Delta W_{ij}^{upwind}.$$

La différence  $\Delta W_{ij}^\beta$  est une combinaison entre la différence centrée  $\Delta W_{ij}^{cent} = W_j - W_i$  et une différence décentrée  $\Delta W_{ij}^{upwind}$ , calculée soit à partir d'un gradient moyenné  $\vec{\nabla} W(C_i)$

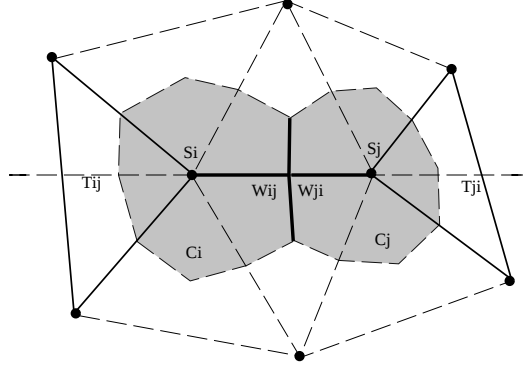


FIG. 16 – *Extension MUSCL en 2D (triangles amont et aval).*

sur la cellule  $C_i$ , soit à partir d'un gradient  $\vec{\nabla}W(T_{ij})$  dans le triangle "amont"  $T_{ij}$  (voir Figure 16), ce qui est nettement moins diffusif. Dans la pratique, la limitation est appliquée sur chacune des quatre composantes non conservatives de  $W^* = (\rho, u, v, P)$ .

Les expériences numériques montrent que le nouveau limiteur permet de converger sans difficulté sur un profil d'aile sans incidence dans un écoulement supersonique ( $M_\infty = 2$ ), avec des niveaux très bas d'entropie générée par la diffusion numérique. On a représenté sur la Figure 17 les lignes de niveau du nombre de Mach et de l'entropie de la solution stationnaire obtenue sur un maillage assez fin (12214 sommets, 24224 triangles) pour le nouveau limiteur (46). La convergence vers la solution stationnaire est représentée sur la

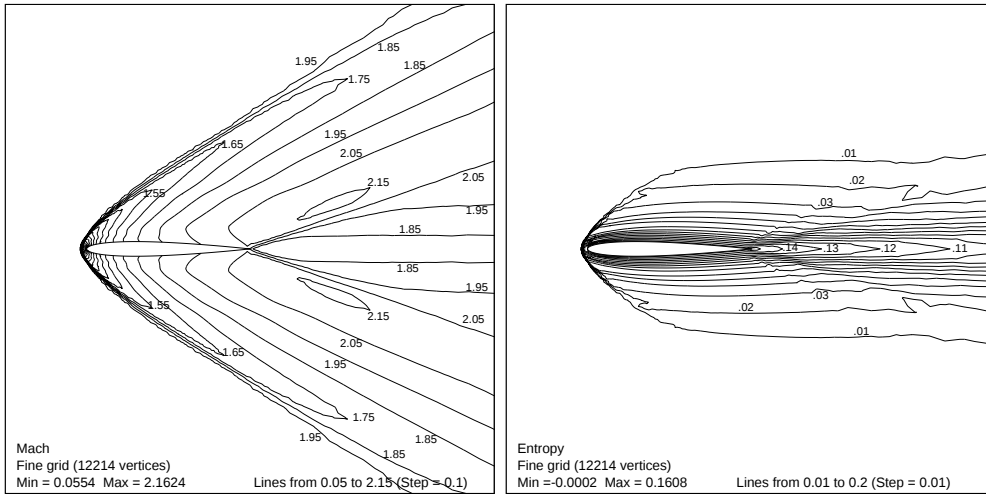


FIG. 17 – *Lignes de niveau pour le nombre de Mach et l'entropie ( $M_\infty = 2$ ).*

Figure 18. Dans ce cas, la convergence est rapide car l'écoulement est partout supersonique. On voit cependant que la régularité du limiteur joue déjà un rôle d'accélérateur de convergence.

Le cas de l'écoulement transsonique ( $M_\infty = 0.85$ ) sans incidence est plus difficile. La convergence vers un état stationnaire n'a pas été atteinte (même avec des pas de temps petits) pour les limiteurs de Spekreijse et Koren, à cause de l'oscillation de la position des chocs. Par contre, si le limiteur de Koren est modifié de manière à vérifier le quatrième critère proposé ( $\psi_{KO^*}(R) = \max(0, \min(2, 4R^2 + R, 1/3 + 2R/3))$ ) on obtient à nouveau la convergence. Elle est à comparer avec celle du nouveau limiteur sur la Figure 19. Pour

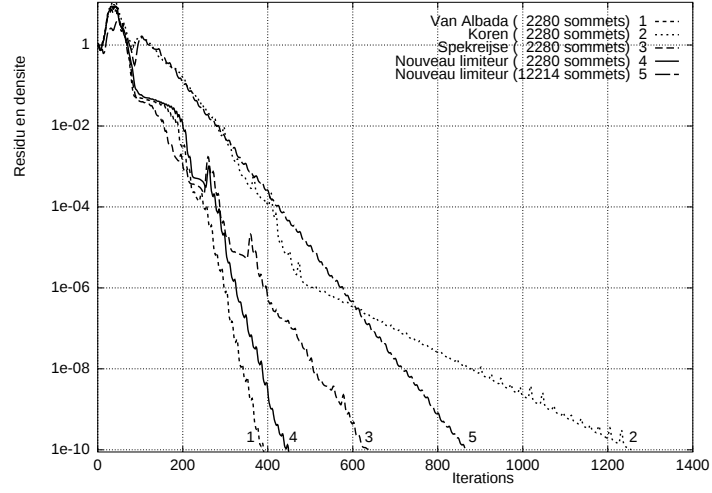


FIG. 18 – Résidu de masse (norme  $L_1$ ) pour  $M_\infty = 2$ .

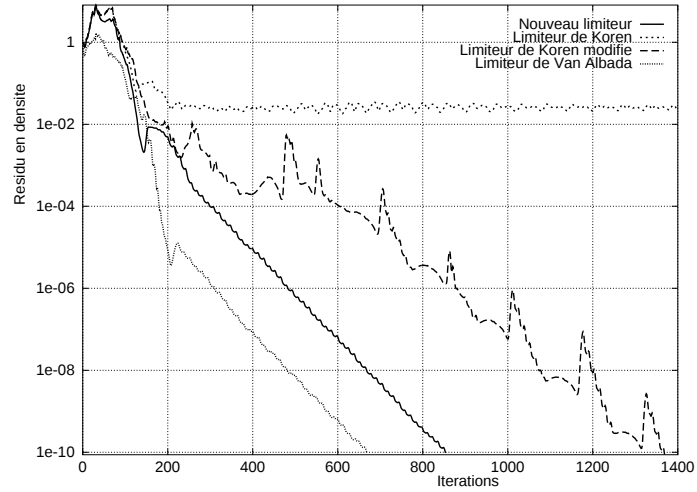


FIG. 19 – Résidu de masse (norme  $L_1$ ) pour  $M_\infty = 0.85$ .

un maillage assez fin (12214 sommets, 24224 triangles), la solution transsonique obtenue avec le nouveau limiteur (46) est très satisfaisante. On a représenté sur la Figure 20 les lignes de niveau du nombre de Mach et de l'entropie de la solution stationnaire.

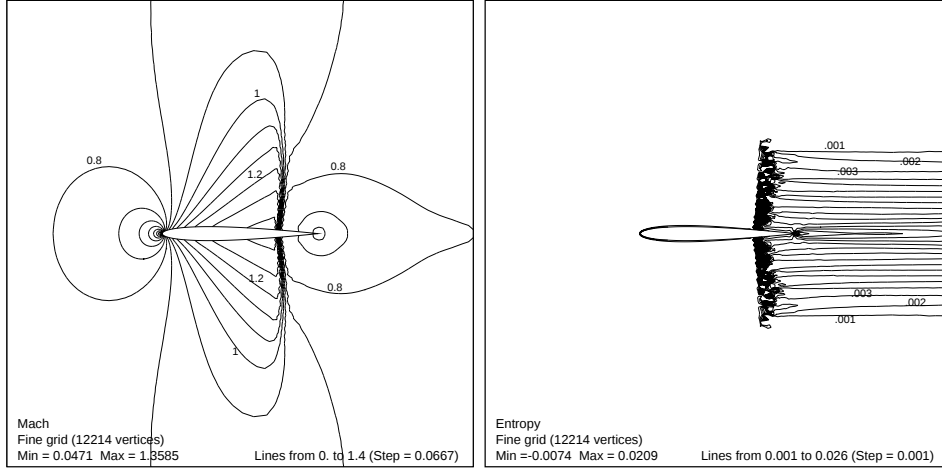


FIG. 20 – Lignes de niveau pour le nombre de Mach et l'entropie ( $M_\infty = 0.85$ ).

### Comparaison de méthodes déterministe et probabiliste: (Publication [3])

L'objet de ce travail était de comparer sur un modèle simple, l'équation de Burgers visqueuse, donnée en fonction du paramètre de viscosité  $\mu$  par

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \mu u_{xx},$$

deux méthodes numériques très différentes dans leur principe et leurs propriétés. La première méthode est la méthode de volumes finis avec limiteurs (41-42-44) vue plus haut. On a choisi les nouveaux limiteurs (46). Simplement, la fonction de flux numérique  $\phi_{upwind}$  est remplacée par les flux de la solution exacte du problème de Riemann pour l'équation de Burgers. On traite séparément les termes de convection et les termes de diffusion (ce procédé s'étend aux équations de Navier-Stokes compressibles en deux ou trois dimensions [16]).

La deuxième méthode appartient à la famille des algorithmes particuliers probabilistes. Dans cette approche, la solution de l'équation de Burgers est interprétée comme la fonction de répartition de la loi d'un processus aléatoire gouverné par une équation de type McKean-Vlasov [9]. Notons qu'ici l'opérateur de diffusion joue un rôle essentiel et ne saurait donc être supprimé pour obtenir des solutions de convection. Ces dernières sont alors obtenues en prenant un coefficient de viscosité très petit mais non nul. L'impact de cette viscosité résiduelle sur les solutions de convection est comparé numériquement ici à l'effet dissipatif induit par la technique des limiteurs utilisée dans l'approche déterministe pour atténuer voire supprimer les oscillations parasites. Une description plus précise de la méthode, qui nous entraînerait sur un terrain trop peu familier, est disponible dans [3].

Un point particulièrement intéressant de cette étude est la comparaison de résultats. Elle ne va pas de soi, puisque la méthode des volumes finis produit des approximations de moyennes par cellules, tandis que la méthode probabiliste produit des approximations ponctuelles en des points repartis non uniformément. Nous avons choisi de comparer des erreurs  $L_1$  discrètes sur des nuages de points différents. Pour la méthode des volumes finis,

les valeurs moyennes sont transformées en valeurs ponctuelles aux centres des cellules par un petit schéma aux différences finies.

Sur les cas non visqueux, les résultats obtenus par les deux méthodes sont comparables. Cependant, les deux cas tests considérés pénalisent différemment les deux méthodes: pour le premier, l'effet de compensation de particules de poids de signes différents (condition initiale non monotone) ajoute un bruit à la solution calculée par la méthode probabiliste; pour le second, la taille du domaine d'intégration pénalise la méthode déterministe, bien que la solution soit régulière. Cette dernière est aussi bien supérieure dans les cas visqueux où l'on cherche une solution stationnaire, puisqu'alors le domaine de calcul est très réduit, tandis que la méthode probabiliste ne capte pas le caractère stationnaire de la solution; dans un cas stationnaire visqueux, les résultats sont alors très favorables à la méthode déterministe (voir Figure 21). Pour les cas instationnaires (l'aspect méthode sans maillage

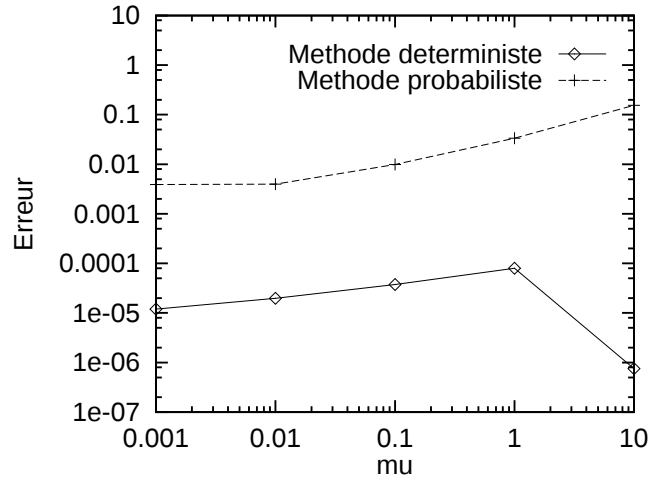


FIG. 21 – Erreurs  $L^1$  pour différentes viscosités  $\mu$ : cas stationnaire.

devient prépondérant), la différence de comportement des deux méthodes en fonction de la viscosité est claire: quand la viscosité est petite, la méthode déterministe est moins précise puisque la solution à approcher est peu régulière; inversement, la viscosité amplifiant l'erreur statistique de l'algorithme, la méthode probabiliste est beaucoup plus précise pour une petite viscosité. Cette différence de comportements est résumée sur la Figure 22.

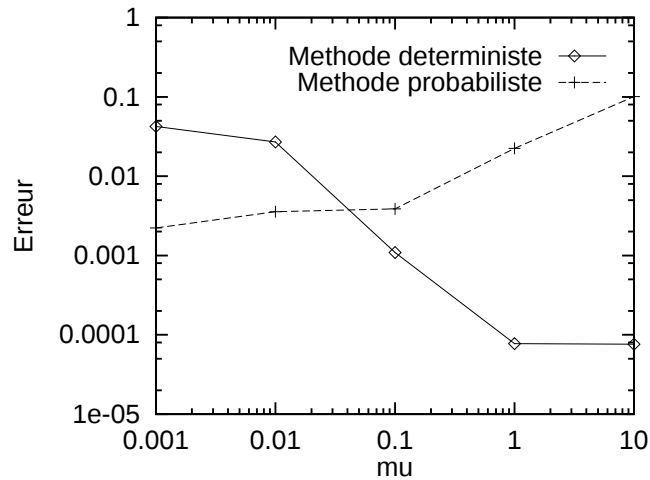


FIG. 22 – Erreurs  $L^1$  pour différentes viscosités  $\mu$ : cas instationnaire.

### Perspectives:

Deux voies de recherche intéressantes à nos yeux font le lien entre les méthodes déterministes en maillage mobile et les méthodes probabilistes. Pour la première, il s'agirait d'utiliser une méthode probabiliste avec peu de points, qui joueraient alors le rôle de sommets mobiles d'un maillage non-structuré pour une méthode déterministe. Pour la seconde, il s'agirait d'utiliser des méthodes d'adaptation de maillage et d'utiliser encore des formulations en maillage mobile. Dans les deux approches, le nombre de sommets utilisés par la méthode déterministe serait considérablement réduit par l'adaptation de maillage (elle-même déterministe ou probabiliste).

### 3.2 Énergies discrètes et stabilité $L^2$ de schémas en volumes finis

*Travaux non publiés, Publication [7]*

Dans cette section, nous avons regroupé quelques calculs d'énergie discrète en volumes finis essentiellement. Dans chacun des cas, nous cherchons à évaluer précisément l'énergie discrète du système et sa variation au cours d'un pas temps. Ceci nous permet d'établir la stabilité  $L^2$  du schéma considéré ou d'un algorithme global de couplage, si l'on peut obtenir le même genre d'estimation pour tous les sous-systèmes.

#### Retour sur le modèle linéaire de piston:

Nous revenons au modèle de piston linéaire de la section 1.2. Les équations de la perturbation du fluide par rapport à un écoulement inerte uniforme sont données en (8). Après discrétisation en espace en volumes finis (16), le champ des inconnus fluides  $\mathbb{W}$  est solution du système différentiel ordinaire (18). Écrivons maintenant le schéma en volumes finis avec un schéma Euler explicite par exemple. On a :

$$\Delta x \frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta t} + \Phi_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2} = 0, \quad 1 \leq j \leq N,$$

où les flux numériques sont donnés par

$$\begin{aligned} \Phi_{1/2} &= F_G, \\ j = 1 \cdots N-1, \quad \Phi_{j+1/2} &= J_0^+ W_j^n + J_0^- W_{j+1}^n, \\ \Phi_{N+1/2} &= F_D, \end{aligned}$$

les matrices  $J_0^\pm$  étant définies en (17). Définissons l'énergie discrète

$$E^n = \frac{\Delta x}{2\rho_0} \sum_{j=1}^N {}^t W_j^n B W_j^n, \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} c_0^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où la matrice  $B$  résulte des termes d'ordre deux de la linéarisation des équations d'Euler sous l'hypothèse d'isentropie. On montre le

**Lemme 4** *La variation d'énergie entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , définie par  $\Delta E^{n+1/2} = E^{n+1} - E^n$  est donnée (en omettant les exposants  $n$ ) par*

$$\begin{aligned}\Delta E^{n+1/2} &= -\frac{c_0 \Delta t}{2\rho_0} \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{\Delta x}\right) \left[ \sum_{j=1}^{N-1} {}^t(W_j - W_{j+1}) B(W_j - W_{j+1}) \right] \\ &+ \frac{\Delta t}{2\rho_0} [{}^t W_1 B(2F_G - AW_1) - {}^t W_N B(2F_D - AW_N)] \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\rho_0 \Delta x} [{}^t(F_G - AW_1) B(F_G - AW_1) + {}^t(F_D - AW_N) B(F_D - AW_N)].\end{aligned}$$

La preuve de ce résultat est élémentaire. Il suffit de faire toutes les sommations en faisant apparaître les différences  $W_j - W_{j+1}$ . Ce résultat amène de nombreux commentaires. D'abord, on obtient comme prévu des termes linéaires et quadratiques de  $\Delta t$  et des  $W_j$ . Ensuite, ce résultat nous donne une condition suffisante de stabilité pour le système fluide seul. En effet, pour un fluide seul dans un piston immobile, on peut prendre des flux  $F_G$  et  $F_D$  calculés à partir des états miroirs. On a alors

$$F_G = J_0^+ M_{u=0} W_1 + J_0^- W_1, \quad F_D = J_0^+ W_N + J_0^- M_{u=0} W_N, \quad (47)$$

où la matrice  $M_{u=0}$  est donnée en (17). Dans ce cas le lemme précédent donne

$$\begin{aligned}\Delta E^{n+1/2} \Big|_{(47)} &= -\frac{c_0 \Delta t}{2\rho_0} \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{\Delta x}\right) \left[ \sum_{j=1}^{N-1} {}^t(W_j - W_{j+1}) B(W_j - W_{j+1}) \right] \\ &- c_0 \rho_0 \Delta t \left(1 - \frac{c_0 \Delta t}{\Delta x}\right) [u_1^2 + u_N^2].\end{aligned}$$

Dans ce cas, on voit très simplement que sous la condition de type CFL  $c_0 \Delta t \leq \Delta x$ , tous les termes dans le développement de  $E^{n+1} - E^n$  sont négatifs. On en déduit que l'énergie décroît et est donc bornée, et donc que le schéma numérique est stable.

Si on s'intéresse maintenant au modèle de piston linéaire avec couplage entre le fluide et la structure, on peut chercher à exprimer la variation d'énergie du fluide en fonction notamment du terme source provenant de la partie structure. Si l'on prend un flux miroir à gauche (extrémité fixe) et un flux donné par (16) à droite, c'est-à-dire

$$F_G = J_0^+ M_{u=0} W_1 + J_0^- W_1, \quad F_D = J_0^+ W_N + J_0^- M_{u=0} W_N + \dot{y} W_0, \quad (48)$$

le Lemme 4 donne

$$\Delta E^{n+1/2} \Big|_{(48)} = \Delta E^{n+1/2} \Big|_{(47)} - \Delta t c_0^2 \rho_N^n + \frac{c_0^2 \Delta t^2 \rho_0}{2\Delta x} (\dot{y}^2 - 2\dot{y} u_N^n).$$

On peut d'abord remarquer que le terme d'ordre un en  $\Delta t$  a la forme attendue (c'est lui qui apparaît avant discrétisation en temps). D'autre part, en fonction de la "valeur d'entrée"  $\dot{y}$ , on pourra peut-être, grâce à l'évaluation précédente, construire un algorithme de couplage pour lequel l'énergie totale (fluide et structure) est décroissante.

### Modèle de dérive-diffusion:

Nous nous intéressons à présent à la discrétisation des équations de dérive-diffusion, intervenant dans la modélisation d'un plasma autour d'un panneau solaire de satellite [62].

$$\partial_t n + \nabla \cdot (-D \nabla n + \mu n E) = S,$$

où  $n$  représente la densité d'un certain type de particules (ions, électrons, neutres, etc...),  $D$  est un coefficient de diffusion strictement positif,  $\mu$  représente la mobilité des particules (elle est positive pour un ion, négative pour un électron et nulle pour une particule neutre),  $E$  est le champ électrique et  $S$  un terme source. L'inconnue du problème est le champ de densité  $n$ . Dans la pratique, les équations de dérive-diffusion pour chaque type de particules sont couplées par l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel. Ici, on suppose le champ  $E$  connu, ainsi que le potentiel  $\Phi$  dont il dérive.

On discrétise l'équation de dérive-diffusion (de type divergence) avec la méthode de Scharfetter et Gummel [60], qui traite de manière particulière les courants  $J$  donnés par

$$J = -D\nabla n + \mu n E.$$

Pour simplifier, on se place en une dimension d'espace sur maillage régulier. On pose  $x_i = i\Delta x$  et  $n_i^l$  est une approximation de la densité  $n$  à l'instant  $t^l = l\Delta t$  et au point  $x_i$ . La densité est connue aux points  $x_i$ . L'idée de la méthode est de garder  $J$  et  $\Phi$  constants entre les points  $x_{i-1}$  et  $x_i$ . On obtient alors le schéma exponentiel suivant:

$$n_i^{l+1} = n_i^l - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( J_{i+\frac{1}{2}}^l - J_{i-\frac{1}{2}}^l \right), \quad (49)$$

avec

$$J_{i-\frac{1}{2}}^l = \mu E_{i-1} \left( \frac{n_i}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i-1}}{D}(x_i - x_{i-1})}} + \frac{n_{i-1}}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i-1}}{D}(x_i - x_{i-1})}} \right). \quad (50)$$

On applique dans la pratique des conditions aux limites par particules, de type adsorption ou niveau imposé. Ici, on considère un maillage avec conditions aux limites périodiques, de telle sorte que les termes de bord n'apparaissent pas.

Pour le problème couplé (où le champ  $E$  dépend des champs de densité de particules), le problème de la stabilité est encore ouvert. On cherche à démontrer ici la stabilité  $L^2$  du schéma (49-50), pour lequel le champ  $E$  est fixé et indépendant du temps. Le schéma n'étant pas à coefficients constants, une analyse de la stabilité par une méthode de Fourier s'avère impossible. Nous allons en fait démontrer la stabilité  $L^2$  par une méthode d'énergie. Nous allons même démontrer qu'une certaine forme quadratique définie positive des inconnues décroît au cours des itérations. Comme le champ  $E$  est fixé, le schéma (49-50) peut se mettre sous la forme

$$n_i^{l+1} = n_i^l + (G_i n_{i+1}^l - F_i n_i^l) - (G_{i-1} n_i^l - F_{i-1} n_{i-1}^l),$$

avec

$$G_i = \mu \frac{\Delta t E_i}{\Delta x} (1 - \exp(-\mu E_i \Delta x / D))^{-1}, \quad F_i = G_i \exp(-\mu E_i \Delta x / D).$$

Comme  $D > 0$ , on peut montrer aisément que les coefficients  $G_i$  et  $F_i$  sont strictement positifs pour tout indice  $i$ . Nous allons démontrer le

**Théorème 9** *On considère le schéma*

$$n_i^{l+1} = n_i^l + (G_i n_{i+1}^l - F_i n_i^l) - (G_{i-1} n_i^l - F_{i-1} n_{i-1}^l), \quad (51)$$

*où les coefficients  $F_i$  et  $G_i$  sont strictement positifs. Sous l'hypothèse*

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad 1 - F_i - G_{i-1} \geq 0, \quad (52)$$

*le schéma est stable.*

La preuve est encore élémentaire. On omet les exposants  $^l$  et on écrit  $\bar{n}_i$  à la place de  $n_i^{l+1}$ . On écrit des sommations sans bornes (valables sur maillage avec conditions aux limites périodiques). En élevant (51) au carré, il vient

$$\begin{aligned}\sum \gamma_i \bar{n}_i^2 &= \sum \gamma_i n_i^2 (1 + F_i^2 + G_{i-1}^2 - 2F_i - 2G_{i-1} + 2F_i G_{i-1}) \\ &+ \sum \gamma_i F_{i-1}^2 n_{i-1}^2 + \sum \gamma_i G_i^2 n_{i+1}^2 \\ &+ \sum \gamma_i n_i n_{i-1} (2F_{i-1} - 2F_i F_{i-1} - 2G_{i-1} F_{i-1}) \\ &+ \sum \gamma_i n_i n_{i+1} (2G_i - 2G_i F_i - 2G_i G_{i-1}) \\ &+ \sum \gamma_i 2n_{i-1} n_{i+1} G_i F_{i-1},\end{aligned}$$

où les  $\gamma_i$  sont des coefficients strictement positifs à déterminer. Dans l'égalité précédente, nous allons chercher à obtenir uniquement des termes carrés en  $n_i$ , en utilisant des inégalités "rectangles"  $2ab \leq a^2 + b^2$ . Rappelons que cette inégalité est stricte dès que  $a \neq b$ . Imaginons maintenant qu'on arrive astucieusement à coups d'inégalités "rectangles" à une inégalité de la forme  $\sum \gamma_i \bar{n}_i^2 \leq \sum \gamma_i n_i^2$ . Nous savons que pour les solutions stationnaires vérifiant  $G_i n_{i+1} = F_i n_i$ , on doit avoir exactement  $\sum \gamma_i \bar{n}_i^2 = \sum \gamma_i n_i^2$ . Ainsi, les inégalités "rectangles" que nous devons utiliser pour avoir une chance de conclure doivent avoir pour cas d'égalité  $G_i n_{i+1} = F_i n_i$ , voire  $G_{i-1} G_i n_{i+1} = F_i F_{i-1} n_{i-1}$ . On utilisera donc les inégalités rectangles suivantes:

$$2F_i G_i n_i n_{i+1} \leq F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2 \quad \text{et} \quad 2F_i F_{i-1} G_i G_{i-1} n_{i-1} n_{i+1} \leq G_i^2 G_{i-1}^2 n_{i+1}^2 + F_i^2 F_{i-1}^2 n_{i-1}^2.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum \gamma_i \bar{n}_i^2 &\leq \sum \gamma_i n_i^2 (1 + F_i^2 + G_{i-1}^2 - 2F_i - 2G_{i-1} + 2F_i G_{i-1}) \\ &+ \sum \gamma_{i+1} F_i^2 n_i^2 + \sum \gamma_{i-1} G_{i-1}^2 n_i^2 \\ &+ \sum \gamma_{i+1} (1 - F_{i+1} - G_i) \frac{1}{G_i} (F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2) \\ &+ \sum \gamma_i (1 - F_i - G_{i-1}) \frac{1}{F_i} (F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2) \\ &+ \sum \gamma_i \frac{G_{i-1}}{F_i} (G_i^2 n_{i+1}^2 + \frac{F_{i-1}^2 F_i^2}{G_{i-1}^2} n_{i-1}^2),\end{aligned}$$

sous l'hypothèse (52) qui assure que les manipulations précédentes sont valides. Après changements d'indice, on obtient

$$\sum \gamma_i \bar{n}_i^2 \leq \sum \gamma_i n_i^2 (1 - F_i - G_{i-1} + \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} \frac{F_i^2}{G_i} + \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i} \frac{G_{i-1}^2}{F_{i-1}}).$$

Il suffit alors de prendre  $\gamma_{i+1}/\gamma_i = G_i/F_i = \exp(-\mu E_i \Delta x/D)$  pour obtenir

$$\sum \gamma_i \bar{n}_i^2 \leq \sum \gamma_i n_i^2.$$

Ceci est possible sur un maillage avec conditions aux limites périodiques si  $\sum E_i = 0$ . Dans ce cas, on a démontré que  $\sum \gamma_i n_i^2$  décroît, donc est borné. Donc tous les  $n_i$  sont bornés et le schéma est stable, ce qui achève la démonstration. On peut remarquer ici que le résultat du Théorème 9 est assez général, puisqu'il serait tout aussi applicable dans le cas d'un maillage non uniforme.

Terminons enfin par une seconde remarque: la méthode d'énergie montre ses limites dans le cas des équations de dérive-diffusion couplées à l'équation de Poisson par l'intermédiaire du champ  $E$ . Le couplage est alors hautement non-linéaire, et le fait que les coefficients  $\gamma_i$  dépendent du champ  $E$  (cette fois instationnaire) rend l'extension de la démonstration problématique.

### Équations de Maxwell en volumes finis: (Publication [7])

De nombreuses méthodes numériques ont été utilisées pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires. À côté des méthodes de différences finies, notamment le schéma de Yee [78], sont apparues récemment des méthodes en volumes finis ou éléments finis, depuis longtemps utilisées en mécanique des fluides [1, 44]. Contrairement aux méthodes en différences finies, celles-ci s'adaptent naturellement aux maillages non-structurés [11].

La stabilité de méthodes en volumes finis est une question étudiée depuis de nombreuses années. Pour des maillages réguliers et structurés, plusieurs types d'approches sont possible. La plus utilisée est l'approche de von Neumann par modes de Fourier [2], qui donne un résultat sur la stabilité  $L^2$  d'un schéma numérique. L'approche par équation équivalente n'en est pas trop éloignée [73], mais n'est également valable que sur maillage régulier. Ces deux approches ne traitent pas le problème des conditions aux limites: l'approche par équation équivalente est purement locale, tandis que l'approche de von Neumann ne traite que des problèmes infinis ou avec conditions aux limites périodiques.

On s'intéresse ici à la stabilité  $L^2$  de schémas en volumes finis en deux et trois dimensions d'espace sur maillages non-structurés, avec des volumes finis de forme quelconque, en se fondant encore sur une méthode de type énergie.

En deux dimensions d'espace, les équations de Maxwell (ondes TM) s'écrivent

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{cases} \quad (53)$$

Elles sont posées dans un domaine polygonal borné de  $\mathbb{R}^2$  avec condition au bord métallique ( $E_z = 0$ ) ou absorbante ( $E_z = c\mu(n_y H_x - n_x H_y)$ , où  $\vec{n} = {}^t(n_x, n_y)$  est la normale sortante unitaire). On suppose qu'on dispose d'une triangulation non-structurée  $\mathcal{T}_h$  du domaine et on applique une méthode de volumes finis dont les cellules sont les triangles, d'aire  $A_i$  et de périmètre  $P_i$ . Le schéma conservatif en volumes finis s'écrit

$$A_i \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} F_{ij} = 0, \quad (54)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps,  $W_i^n$  est une approximation de la moyenne de  $W = {}^t(E_z, H_x, H_y)$  sur le triangle  $\mathcal{T}_i$  à l'instant  $t^n$ , et les flux numériques  $F_{ij}$  pour les arêtes internes sont décentrés d'ordre un et donnés par

$$F_{ij} = (An_{ijx} + Bn_{ijy})^+ W_i + (An_{ijx} + Bn_{ijy})^- W_j, \quad (55)$$

où les exposants  $\pm$  correspondent aux parties positive et négative de matrices après diagonalisation,  $\vec{n}_{ij}$  est la normale intégrée du triangle  $i$  vers le triangle  $j$ , enfin  $A$  et  $B$  sont les matrices des flux dans chaque direction du système hyperbolique de départ (53). Pour un bord métallique, on utilise un état fictif "miroir" et pour la condition absorbante un état fictif nul.

On cherche une condition nécessaire et/ou suffisante de stabilité du schéma en volumes finis (54-55). On utilise comme énergie discrète

$$\mathcal{E}^n = \sum_i A_i {}^t W_i^n \cdot W_i^n. \quad (56)$$

On cherche sous quelles conditions la variation d'énergie  $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n$  est négative (pour tout champ  $W^n$ ). On montre le

**Théorème 10** *Pour le schéma (54-55), l'énergie  $\mathcal{E}^n$  définie en (56) n'augmente pas et le schéma est donc  $L^2$ -stable, sous la condition*

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2A_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij}.$$

Ce résultat se généralise directement à des volumes finis de formes quelconques, pourvu qu'on redéfinisse certains éléments géométriques comme les arêtes (lignes polygonales d'intersection de deux cellules voisines), la longueur des arêtes (l'intégrale de la normale le long d'une arête donne la longueur de l'arête et sa normale) et le périmètre des cellules (la sommes des longueurs des arêtes). Le schéma aux volumes finis s'écrit exactement de la même façon, et le traitement des conditions aux limites est identiques (états fictifs "miroir" ou "nul"). On obtient alors le

**Théorème 11** *Le schéma (54-55) utilisé sur des volumes finis polygonaux arbitraires est  $L^2$ -stable, sous la condition*

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2A_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij}.$$

On peut montrer que la condition de stabilité du Théorème 11 est en fait nécessaire pour une classe de maillages réguliers particuliers (de tout  $\mathbb{R}^2$  ou à bords périodiques). On a la propriété suivante:

**Propriété 1** *On considère une partition en volumes finis de ( $\mathbb{R}^2$  ou d'un domaine bornée avec condtions limites périodiques) telle que*

(i) *on peut colorier les cellules en rouge ou vert, sans que deux cellules voisines aient la même couleur,*

(ii) *on a l'uniformité suivante:  $\exists (P, A)$  tels que  $(\forall \mathcal{T}_i, A_i/P_i = A/P)$ .*

*Alors le schéma (54-55) est instable si  $c\Delta t > \frac{2A}{P}$ .*

On montre aisément que le champ

$$W_i = \begin{cases} W_r \equiv {}^t(1, 0, 0), & \text{si } \mathcal{T}_i \text{ est vert,} \\ W_v \equiv {}^t(-1, 0, 0), & \text{si } \mathcal{T}_i \text{ is rouge.} \end{cases}$$

est un mode propre pour la valeur propre  $\lambda_i = 1 - \frac{c\Delta t P}{A}$ . Ce résultat concerne les maillages rectangulaires réguliers (on retrouve la condition de Depeyre [13]:  $\frac{c\Delta t}{\Delta x} + \frac{c\Delta t}{\Delta y} \leq 1$ ) et triangulaires réguliers, comme ceux montrés dans la Figure 23.

En trois dimensions d'espace, les équations de Maxwell peuvent encore s'écrire sous la forme d'un système hyperbolique linéaire de la variable  $W = {}^t(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ . On peut encore définir un schéma en volumes finis dont les cellules sont les tétraèdres

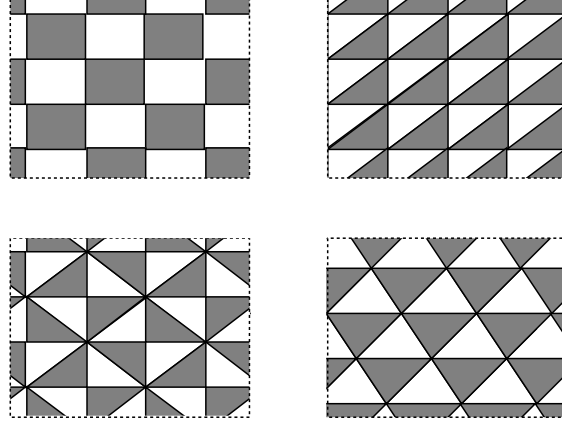


FIG. 23 – Exemples de maillages dits réguliers.

d'une tétraédrisation d'un domaine polyédrique. Les conditions aux limites métalliques ou absorbantes sont encore traitées faiblement avec des flux vers un état fictif "miroir" ou "nul". Le schéma s'écrit alors

$$V_i \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} F_{ij} = 0, \quad (57)$$

où  $V_i$  est le volume du tétraèdre  $\mathcal{T}_i$  et où les flux numériques décentrés d'ordre un  $F_{ij}$  sont donnés pour les faces internes par

$$F_{ij} = (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz})^+ W_i + (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz})^- W_j, \quad (58)$$

où les exposants  $\pm$  correspondent toujours aux parties positive et négative de matrices après diagonalisation,  $\vec{n}_{ij}$  est la normale intégrée du tétraèdre  $i$  vers le tétraèdre  $j$ , enfin  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  sont les trois matrices de flux du système hyperbolique de départ.

On considère maintenant l'énergie discrète dans le domaine volumique

$$\mathcal{E}^n = \sum_i V_i^t W_i^n W_i^n. \quad (59)$$

On cherche sous quelles conditions cette énergie décroît pour toute donnée. On obtient le

**Théorème 12** *Pour le schéma (57-58), l'énergie  $\mathcal{E}^n$  définie en (59) n'est pas croissante, et le schéma est ainsi  $L^2$ -stable, sous la condition*

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2V_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij}.$$

Ce résultat se généralise directement à des volumes finis de formes quelconques, pourvu qu'on redéfinisse certains éléments géométriques comme les faces (surfaces d'intersection de deux cellules voisines), l'aire des faces (l'intégrale de la normale le long d'une face donne son aire et sa normale) et le périmètre des cellules (la somme des aires des faces). Le schéma aux volumes finis s'écrit exactement de la même façon, et le traitement des conditions aux limites est identiques (états fictifs "miroir" ou "nul"). On obtient alors le

**Théorème 13** *Le schéma (57-58) sur des volumes finis arbitraires fait décroître l'énergie  $\mathcal{E}^n$  de (59) pour toute donnée initiale, et il est donc  $L^2$ -stable, sous la condition*

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2V_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij}.$$

On peut comparer les résultats obtenus ici pour les dimensions deux et trois avec les résultats précédents. En deux dimensions d'espace, nous avons retrouvé la condition de Depeyre [13] sur des maillages réguliers. Elle est étendue pour des maillages quelconques. En deux et trois dimensions d'espace, la condition de Vila et Villedieu [72] est deux fois plus restrictive et correspond à une propriété de monotonie que nous ne détaillerons pas ici.

Nous avons trouvé une condition nécessaire et suffisante de stabilité en deux dimensions d'espace (pour des maillages assez réguliers). En trois dimensions d'espace, la condition générale du Théorème 13 n'est en fait jamais nécessaire. Nous proposons une condition plus intéressante (qui semble numériquement nécessaire pour des maillages tridimensionnels réguliers) sous la forme d'une

**Conjecture 3.1** *Pour tout volume fini  $\mathcal{C}_i$ , soit  $K_i$  la plus petite constante telle que, pour tout champ de vecteur  $W$  de  $\mathbb{R}^6$  tangent à la surface  $\partial\mathcal{C}_i$  de  $\mathcal{C}_i$ , i.e.  $({}^t\vec{n}, {}^t\vec{n}).W = 0$ , on ait*

$$\left\| \int_{\partial\mathcal{C}_i} W \right\|^2 \leq K_i \int_{\partial\mathcal{C}_i} \|W\|^2.$$

*Alors, pour le schéma (57-58) en volumes finis quelconques, l'énergie  $\mathcal{E}^n$  définie en (59) n'augmente pas, et ainsi le schéma est  $L^2$ -stable, sous la condition*

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2V_i}{K_i}.$$

La démonstration de cette conjecture risque de nous amener vers des domaines peu familiers comme la géométrie différentielle. On peut se demander si les résultats démontrés ici pour les équations de Maxwell s'étendent aux systèmes de Friedrichs en général (ou si le résultat de Vila et Villedieu [72] est optimal en un certain sens). Plus généralement, ce type de démonstration énergétique doit pouvoir s'appliquer à un grand nombre de problèmes linéaires, notamment en électromagnétisme.

## Liste des Publications

### Serge Piperno

#### 1. Revues scientifiques avec comité de lecture.

- [[1]] S. Piperno, C. Farhat et B. Larrouturou. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 124(1-2):79–112, 1995.
- [[2]] S. Piperno, B. Larrouturou et M. Lesoinne. Analysis and compensation of numerical damping in a one-dimensional aeroelastic problem. *International Journal for Computational Fluid Dynamics*, 6:157–174, 1996.
- [[3]] M. Bossy, L. Fezoui et S. Piperno. Comparison of a stochastic particle method and a finite volume deterministic method applied to Burgers equation. *Monte Carlo Methods and Applications*, 3(2):113–140, 1997.
- [[4]] S. Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2D inviscid aeroelastic simulations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25:1207–1226, 1997.
- [[5]] S. Piperno et S. Depeyre. Criteria for the design of limiters yielding efficient high resolution TVD schemes. *Comput. & Fluids*, 27(2):183–197, 1998.
- [[6]] S. Piperno et P.-E. Bournet. Numerical simulations of wind effects on flexible civil engineering structures. *Revue Européenne des Éléments finis*, 8(5-6):659–687, 1999.
- [[7]] S. Piperno.  $L^2$ -stability of the upwind first order finite volume scheme for the Maxwell equation in two and three dimensions on arbitrary unstructured meshes. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 34(1):139–158, 2000.
- [[8]] S. Piperno et C. Farhat. Partitioned Procedures for the Transient Solution of Coupled Aeroelastic Problems - Part II: Energy Transfer Analysis and Three-Dimensional Applications. A paraître dans *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2000.
- [[9]] S. Piperno et C. Farhat. Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems. A paraître dans la *Revue Européenne des Éléments finis*, 2000.

#### 2. Actes de colloques avec comité de lecture.

- [[10]] S. Lantéri, B. N’konga et S. Piperno. Domain partitioning and message passing for the distribution of unstructured mesh calculations on mimd platforms: Application to steady and unsteady compressible flow simulations. *Proceedings of the Parallel CFD’96 Conference*, Capri, Italy, 1996. Elsevier Science Publishers B.V., North Holland.
- [[11]] S. Piperno. Two-dimensional Euler aeroelastic simulations with interface matching relaxation. *Proceedings of the Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, pages 898–904, Paris, France, 1996. John Wiley & Sons.
- [[12]] S. Piperno et C. Farhat. Partitioned procedures for aeroelastic problems: Analysis of interface energy and momentum exchanges and three-dimensional applications. *4<sup>th</sup> US National Congress on Computational Mechanics*, San Francisco, California, 1997.

## Références bibliographiques

- [1] J.J. Ambrosiano, S.T. Brandon, R. Löhner et C. R. DeVore. Electromagnetics via the Taylor-Galerkin finite element method on unstructured grids. *J. Comput. Phys.*, 110:310–319, 1994.
- [2] D.A. Anderson, J.C. Tannehill et R.H. Pletcher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [3] D. Arnold, F. Brezzi et M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21(4):337–344, 1984.
- [4] J.T. Batina. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA J.*, 28:1381–1388, 1990.
- [5] J.T. Batina. Implicit flux-split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes. *AIAA J.*, 29:1836–1843, 1991.
- [6] T. Belytschko, P. Smolinski et W.K. Liu. Stability of multi-time step partitioned integrators for first-order finite element systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 49:281–297, 1985.
- [7] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley et R.L. Halfman. *Aeroelasticity*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1957.
- [8] F. Blom et P. Leyland. Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ale method. In *AIAA 28th Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, Colorado*, Juin 1997. AIAA paper 97-1770.
- [9] M. Bossy et D. Talay. A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Math. Comp.*, 1, 1997.
- [10] J. Chung et G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 60:371–375, 1993.
- [11] Jean-Pierre Cioni, L. Fezoui, L. Anne et F. Poupaud. A parallel FVTD Maxwell solver using 3D unstructured meshes. In *13th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*, Monterey, California, 1997.
- [12] R. Dat. *Vibrations aéroélastiques*. Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'espace. ENSAE Département des Structures-Matériaux-Technologie, 1978.
- [13] S. Depeyre. *Etude de schémas d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés*. mathématiques appliquées, ENPC, janvier 1997.
- [14] J. Donea, S. Giuliani et J.P. Halleux. An Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 33:689–723, 1982.
- [15] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus et M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 163:231–245, 1998.
- [16] C. Farhat, L. Fezoui et S. Lantéri. Two-dimensional viscous flow computations on the Connection Machine: unstructured meshes, upwind schemes and massively parallel computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 102:61–88, 1991.
- [17] C. Farhat, M. Lesoinne et P. Le Tallec. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157:95–114, 1998.

- [18] C. Farhat, M. Lesoinne et N. Maman. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: three field formulation, geometric conservation and distributed solution. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 21:807–835, 1995.
- [19] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Stern et S. Lantéri. High performance solution of 3D nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms: Methodology and preliminary results. *Advances in Engineering Software*, 28:43–61, 1997.
- [20] C. Farhat et T.Y. Lin. Transient aeroelastic computations using multiple moving frames of reference. AIAA paper 90-3053-CP, 1990.
- [21] C. Farhat, K.C. Park et Y.D. Pelerin. An unconditionally stable staggered algorithm for transient finite element analysis of coupled thermoelastic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 85:349–365, 1991.
- [22] L. Fezoui et B. Stoufflet. A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 84:174–206, 1989.
- [23] C. Grandmont. *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1998.
- [24] H. Guillard et C. Farhat. On the significance of the GCL for flow computations on moving meshes. In *AIAA 7th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, 11-14 Janvier 1999. AIAA paper 99-0793.
- [25] K.K. Gupta. Development of a finite element aeroelastic analysis capability. *Journal of Aircraft*, 33:995–1002, 1996.
- [26] G.P. Guruswamy. Interaction of fluids and structures for aircraft applications. *Comput. & Structures*, 30(1/2):1–13, 1988.
- [27] G.P. Guruswamy. Unsteady aerodynamic and aeroelastic calculations for wings using Euler equations. *AIAA J.*, 28:461–469, March 1990.
- [28] K.E. Gustafson et J.A. Sethian, éditeurs. *Vortex methods and Vortex motions*. SIAM, Philadelphia, 1991.
- [29] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357–393, 1983.
- [30] A. Harten et J.M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 50:235–269, 1983.
- [31] A. Harten, J.M. Hyman et P.D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2(29):297–322, 1976.
- [32] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes et R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292, 1977.
- [33] W.P. Huffman, R.G. Melvin, D.P. Young, F.T. Johnson, J.E. Bussioletti, M.B. Bieterman et C.L. Hilmes. Practical design and optimization in computational fluid dynamics. In *11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida*, 6-9 Juillet 1993. AIAA paper 93-3111.
- [34] T.J.R. Hughes et W.K. Liu. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 45:371–374, 1978.
- [35] A. Jameson. Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows. In *11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida*, 6-9 Juillet 1993. AIAA paper 93-3359.
- [36] B. Koobus et C. Farhat. Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1999. Soumis pour publication.

- [37] B. Koren. A robust upwind discretization method for advection, diffusion and source terms. In C.B. Vreugdenhil et B. Koren, éditeurs, *Numerical methods for advection - diffusion problems*, pages 117–138. Vieweg-Braunschweig, 1993.
- [38] S. Lanteri. *Simulation d'Écoulements Aérodynamiques Stationnaires sur une Architecture S.I.M.D. Massivement Parallèle*. Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur, Université de Nice-Sophia-Antipolis, France, 1991.
- [39] E.M. Lee-Rausch et J.T. Batina. Wing-flutter boundary prediction using unsteady Euler aerodynamic method. AIAA paper 93-1422, 1993.
- [40] P. Le Tallec et S. Mani. Conservation laws for fluid-structure interactions. In T. Kvamsdal, I. Enevoldsen, K. Herfjord, C. B. Jenssen, K. Mehr, et S.P. Norsett, éditeurs, *Numerical methods for advection - diffusion problems*, pages 61–88. Tapir, 1999.
- [41] P. Le Tallec et J. Mouro. Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement. Technical Report RR-2961, INRIA, August 1996.
- [42] M. Lesoinne et C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134:71–90, 1996.
- [43] K.J. Lin, P.J. Lu et J.Q. Tarn. Flutter analysis of cantilever composite plates in subsonic flow. *AIAA J.*, 27:1102–1109, 1989.
- [44] R. Löhner et J. Ambrosiano. A finite element solver for the Maxwell equations. In *GAMNI-SMAI Conference on Numerical Methods for the Maxwell Equations*, Paris, France, 1989. SIAM, Philadelphia, 1991.
- [45] I. Lottati. The role of structural and aerodynamic damping on the aeroelastic behavior of wings. *Journal of Aircraft*, 23:606–608, 1986. Engineering notes.
- [46] N. Maman et C. Farhat. Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations: a parallel approach. *Comput. & Structures*, 54(4):779–785, 1986.
- [47] J. Mouro. Numerical simulation of nonlinear fluid structure interactions problems and application to hydraulic shock-absorbers. In *Third World Conf. Appl. Computational Fluid Dynamics, Basel World User Days CFD*, 1996.
- [48] K. Nakahashi et G.S. Deiwert. Self-adaptive grid method with application to airfoil flows. *AIAA J.*, 25:513–520, 1987.
- [49] B. N’Konga et H. Guillard. A Roe scheme on non-structured meshes for moving boundaries problems. In *Proceedings of the 13th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics*, pages 1.447–1.449, Trinity College, Dublin, Irlande, 22-26 Juillet 1991.
- [50] B. N’Konga et H. Guillard. Godunov type method on non-structured meshes for three-dimensional moving boundary problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113:183–204, 1994.
- [51] T. Nomura et T. Hughes. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95:115–138, 1992.
- [52] S. Obayashi, G.P. Guruswamy et P.M. Goorjian. Streamwise upwind algorithm for computing unsteady transonic flows past oscillating wings. *AIAA J.*, 29:1668–1677, 1991.
- [53] C. Pares Madronal. *Etude mathématique et approximation numérique de quelques problèmes aux limites de la mécanique des fluides*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1992.
- [54] K.C. Park et C.A. Felippa. Computational methods for transient analysis. In T. Belytschko and T.J.R. Hughes, éditeurs, *Partitioned analysis of coupled systems*, pages 157–219. North-Holland Pub. Co., 1983.

- [55] K.C. Park, C.A. Felippa et J.A. De Runtz. Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis. In T. Belytschko and T.L. Geers, éditeurs, *Computational methods for fluid-structure interaction problems*, volume 26, pages 94–124. ASME Applied Mechanics Symposia Series, 1977.
- [56] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*. Mathématiques appliquées, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France, juin 1995.
- [57] O. Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides*. Collection Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, Paris, 1988.
- [58] B.S. Sarma et T.K. Varadan. Nonlinear panel flutter by finite-element method. *AIAA J.*, 26:566–574, 1988.
- [59] R.H. Scanlan et J.J. Tomko. Airfoil and bridge deck flutter derivatives. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 97(EM6):1717–1737, 1971.
- [60] D.L. Scharffeter et K.G. Gummel. Large-signal analysis of a silicon read diode oscillator. *IEEE Trans. El. Devices*, ED-16:64–77, 1969.
- [61] J.A. Sethian. *Level set methods. Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1996.
- [62] F. Severin. *Etude théorique et simulation numérique de décharges électrostatiques dans le vide*. Mathématiques appliquées, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, octobre 1998.
- [63] S.P. Spekreijse. *Multigrid Solution of the Steady Euler Equations*. PhD thesis, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1987.
- [64] T.W. Strganac et D.T. Mook. Numerical model of unsteady subsonic aeroelastic behavior. *AIAA J.*, 28:903–909, 1990.
- [65] P.K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(5):995–1011, 1984.
- [66] P.D. Thomas et C.K. Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA J.*, 17:1030–1037, 1979.
- [67] H. Tran, B. Koobus et C. Farhat. Numerical simulations of vortex shedding flows past moving obstacles using the  $k - \varepsilon$  turbulence model on unstructured dynamic meshes. Technical Report 97-16, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado, 1997.
- [68] G.D. Van Albada, B. Van Leer et W.W.jun. Roberts. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronom. and Astrophys.*, 108:76–84, 1982.
- [69] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme II: Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14:361–370, 1974.
- [70] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32:361–370, 1979.
- [71] B. Van Leer. Flux-vector splitting for the Euler equations. *Lecture Notes in Physics*, 170:507–512, 1982.
- [72] J.-P. Vila et P. Villedieu. Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de Friedrichs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 3(325):671–676, 1997.
- [73] R.F. Warming et F. Hyett. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *J. Comput. Phys.*, 14(2):159–179, 1974.
- [74] K. Washizu, A. Ohya, Y. Otsuki et K. Fujii. Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode. *J. Sound Vibration*, 59(2):195–210, 1978.

- [75] K. Washizu, A. Ohya, Y. Otsuki et K. Fujii. Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a torsional mode due to a transverse wind. *J. Sound Vibration*, 72(4):507–521, 1980.
- [76] W.L. Wood, M. Bossak et O.C. Zienkiewicz. An alpha modification of Newmark’s method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 15:1562–1566, 1981.
- [77] E.C. Yates. Agard standard aeroelastic configuration for dynamic response, candidate configuration I. – wing 445.6. NASA TM-100492, 1987.
- [78] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, (AP-16):302–307, 1966.